Folgen und Reihen

Mathematik I für Chemiker

Daniel Gerth

Überblick Folgen und Reihen

Dieses Kapitel erklärt:

- Was man unter Folgen und Reihen versteht;
- Was man unter Grenzwert von Folgen und Reihen versteht;
- Wie man die Grenzwerte von Folgen mit Hilfe der Grenzwertsätze berechnen kann;
- Wie man über die Konvergenz von Reihen schließt;
- Welche Konvergenzkriterien existieren.

Inhaltsverzeichnis

Folgen

Betrachten Sie folgende Liste von Zahlen:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots .$$

Erkennen Sie ein Gesetz, mit dem man die Liste sinnvoll fortsetzen kann?

Folgen

Betrachten Sie folgende Liste von Zahlen:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots .$$

Erkennen Sie ein Gesetz, mit dem man die Liste sinnvoll fortsetzen kann?

Offenbar können Sie mit diesem Gesetz zu jeder vorgegebenen Position das zugehörige Element der Liste ausrechnen. Jeder natürlichen Zahl ("Position") wird also eine reelle Zahl ("Listenelement") zugeordnet – es entsteht eine Abbildung $a:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Solche Abbildungen heißen **"Zahlenfolgen".** Sie spielen in vielen Anwendungen eine große Rolle und liefern uns den Schlüssel zum Verständnis des Grenzwerts - des wohl wichtigsten Begriffs der Analysis.

Definition 1.1 (Zahlenfolgen)

Eine Abbildung a, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche reelle) Zahlenfolge.

Statt $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ schreibt man $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz (a_n).

$a_n = a(n)$ heißt $n-$tes Folgenglied dieser Zahlenfolge.

Anmerkung:

Man kann als Indexmenge auch jede Menge der Form $\{n \in \mathbb{Z} : \; n \geq n_0\}$ für festes $n_0 \in \mathbb{Z}$ benutzen.

Insbesondere ist $\mathbb{N}_0$ zulässig. Notation für diesen Fall: $(a_n)_{n\geq n_0}$.

Beschreibung der Folgen

Die Beschreibung von Folgen erfolgt durch

- **Angabe von Bildungsgesetzen**
  - *Explizites Bildungsgesetz:*
    Der Wert a_n wird mittels einer Gleichung in Abhängigkeit von n angeben (Funktionsvorschrift).

    Beispiel: Die Bildungsvorschrift $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$ erzeugt die Folge

$$-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{36}, -\frac{1}{49} \ldots .$$

$a_{32} - ?$

Beschreibung der Folgen

Die Beschreibung von Folgen erfolgt durch

- **Angabe von Bildungsgesetzen**

  - *Explizites Bildungsgesetz:*
    Der Wert a_n wird mittels einer Gleichung in Abhängigkeit von n angeben (Funktionsvorschrift).
    Beispiel: Die Bildungsvorschrift $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$ erzeugt die Folge
    $$-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{36}, -\frac{1}{49} \dots .$$
    $a_{32} - ?$

  - *Rekursionsvorschrift:*
    Der Wert a_{n+1} wird in Abhängigkeit von a_n und n ausgedrückt. Zusätzlich wird a_1 angegeben (vgl. Induktionsprinizip).
    Beispiel: Die Rekursionsvorschrift $a_{n+1} = a_n + n, \;\; a_1 = 1$, erzeugt die Folge
    $$1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, \dots .$$
    $a_{32} - ?$ Mühsam?

Beschreibung der Folgen

Die Beschreibung von Folgen erfolgt durch

- **Angabe von Bildungsgesetzen**
  - *Explizites Bildungsgesetz:*
    Der Wert a_n wird mittels einer Gleichung in Abhängigkeit von n angeben (Funktionsvorschrift).

    Beispiel: Die Bildungsvorschrift $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$ erzeugt die Folge

    $$-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{36}, -\frac{1}{49} \dots .$$

    $a_{32}-?$
  - *Rekursionsvorschrift:*
    Der Wert a_{n+1} wird in Abhängigkeit von a_n und n ausgedrückt. Zusätzlich wird a_1 angegeben (vgl. Induktionsprinizip).

    Beispiel: Die Rekursionsvorschrift $a_{n+1} = a_n + n, \ a_1 = 1$, erzeugt die Folge

    $$1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, \dots .$$

    $a_{32}-?$ Mühsam?
- **Aufzählung:** $a_n = (1, 2, 3, 4, \dots)$.

Beispiele zu Hause

Man gebe die ersten 5 Glieder der Folgen

- $(n!)$;
- $\left(\frac{1}{1+n}\right)$;
- $\left(\frac{1}{2^n}\right)$;
- $(\sqrt[n]{n})$

an. Wie lautet das 1000-te Folgenglied?

Man gebe die ersten 5 Glieder der durch

- $a_{n+1} = \frac{a_n}{2},\ a_1 = 1,$
- $a_n = n a_{n-1},\ a_0 = 1,\ n \geq 1$

gegebenen Folge an. Können Sie eine explizite Bildungsvorschrift finden?

Rekursionsvorschrift

Gelegentlich greift man in Rekursionsformeln auch auf mehrere vorhergehende Glieder zurück. Drückt man dabei a_{n+m} über $a_n, \ldots, a_{n+m-1}$ aus, muss man m Startwerte angeben.

Fibonacci-Zahlen

Die Rekursionsvorschrift für die Fibonacci-Zahlen

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_1 = 1,\ a_2 = 1$$

erzeugt die Folge

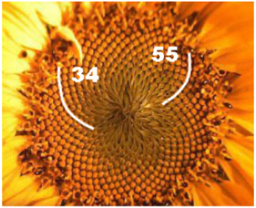
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Diese Folge wurde von **Leonardo da Pisa (Fibonacci),** ca. 1180-1241, bei der mathematischen Modellierung einer Kaninchenpopulation entdeckt. Fibonacci gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters.

Fibonacci-Zahlen in der Natur

Fibonacci-Zahlen finden sich häufig an Pflanzenteilen wieder. Grund ist die damit erreichbare hohe Lichtausbeute:

- Die Anzahl von Blütenblättern ist oft eine Fibonacci-Zahl (Ringelblume 13, Aster 21, Sonnenblume, Gänseblümchen 21/34/55/89);
- Die Anzahl gewisser Spiralen in Blütenkörbchen (Sonnenblumenkerne) oder bei Zapfen (Kiefer) ist häufig eine Fibonacci-Zahl.



Anmerkung

Die Umwandlung von expliziter in rekursive Vorschrift und zurück kann schwierig sein. Es gibt Folgen, bei denen nur eine Form oder sogar gar kein Bildungsgesetz bekannt ist.

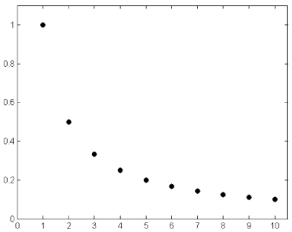
Beispiel: Folge der Primzahlen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots.$$

Die Bestimmung z. B. des 42-ten Folgenglieds (181) ist hier ohne eine betreffende Liste sehr aufwändig.

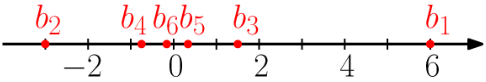
Visualisierung von Folgen

Darstellung des Graphen in der Ebene:



Der Graph einer Zahlenfolge (a_n) besteht aus den diskret liegenden Punkten $(n, a_n),\ n \in \mathbb{N}$.

Mitunter ist es auch zweckmäßig, lediglich die Folgenglieder auf dem Zahlenstrahl darzustellen:



Beschränktheit und Monotonie

Definition 1.2

Eine Folge (a_n) heißt ***beschränkt,*** *wenn es eine reelle Zahl $C \geq 0$ gibt, so dass*

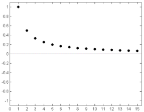
$$|a_n| \leq C \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

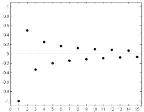
Eine Folge (a_n) heißt

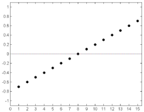
- *(streng)* ***monoton wachsend,*** *wenn $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n < a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$.*
- *(streng)* ***monoton fallend,*** *wenn $a_n \geq a_{n+1}$ (bzw. $a_n > a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$.*
- *(streng)* ***monoton,*** *falls sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist.*

Beispiel

- $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist streng monoton fallend beschränkt $(C = 1)$.
- $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ ist nicht monoton, aber beschränkt $(C = 1)$.
- $\left(-\frac{4}{5} + \frac{n}{10}\right)$ it streng monoton wachsend und unbeschränkt.







Spezielle Folgen

Definition 1.3 (Arithmetische Folge)

Eine Folge (a_n) *heißt* **arithmetische Folge,** *falls die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder immer den gleichen Wert ergibt, d.h.*

$$a_{n+1} - a_n = d$$

für eine Konstante $d \in \mathbb{R}$.

Satz 1.4

Sei (a_n) *eine arithmetische Folge mit* $a_{n+1} - a_n = d,\ n \in \mathbb{N}$. *Dann lautet die explizite Bildungsvorschrift:*

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Beispiel

Mit $a_1 = 3$ und $d = -2$ erhält man die Folge

$$3, 1, -1, -3, -5, -7, -9, \dots.$$

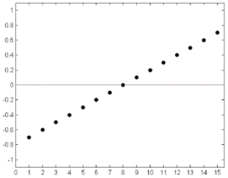
Spezielle Folgen

Graphische Darstellung der arithmetischen Folge

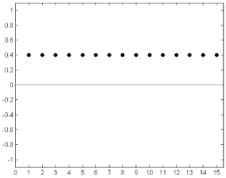
Nach Satz 1.4 kann man eine arithmetische Folge als Einschränkung der affin linearen Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a_1 + d(x-1) = a_1 - d + dx$$

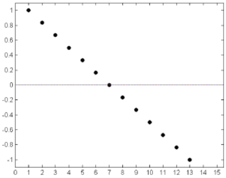
auf die natürlichen Zahlen auffassen. Die Punkte des Graphen liegen somit auf einer Geraden mit Anstieg d.



$a_1 = -\frac{7}{10},\ d = \frac{1}{10}$



$a_1 = \frac{2}{5},\ d = 0$



$a_1 = 1,\ d = -\frac{1}{6}$

Spezielle Folgen

Definition 1.5 (Geometrische Folge)

Eine Folge (a_n) *heißt* **geometrische Folge,** *falls der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder immer den gleichen Wert ergibt, d.h.*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

für eine Konstante $q \in \mathbb{R},\ q \neq 0.$

Satz 1.6

Sei (a_n) *eine geometrische Folge mit* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q,\ n \in \mathbb{N}$. *Dann lautet die explizite Bildungsvorschrift:*

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Beispiel

Mit $a_1 = 1$ und $q = \frac{1}{2}$ erhält man die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$.

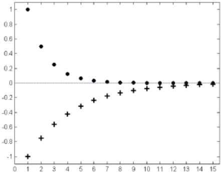
Spezielle Folgen

Graphische Darstellung der geometrischen Folge

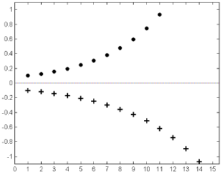
Nach Satz 1.6 kann man für $q > 0$ eine geometrische Folge als Einschränkung der Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a_1 q^{x-1} = \frac{a_1}{q} q^x$$

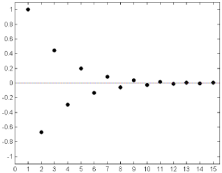
auf die natürlichen Zahlen auffassen. Die Punkte des Graphen liegen für $q > 0$ somit auf dem Graphen einer Exponentialfunktion mit Basis q.



$a_1 = 1,\ q = \frac{1}{2}\ (\cdot)$
$a_1 = -1,\ q = \frac{3}{4}\ (+)$



$a_1 = \frac{1}{10},\ q = 1.25\ (\cdot)$
$a_1 = -\frac{1}{10},\ q = 1.2\ (+)$



$a_1 = 1,\ q = -\frac{2}{3}$

Folgen und Wachstumsprozesse

Arithmetische Folgen werden häufig verwendet, wenn es um einen konstanten Zuwachs (**lineares** Wachstum) geht.

Folgen und Wachstumsprozesse

Arithmetische Folgen werden häufig verwendet, wenn es um einen konstanten Zuwachs (**lineares** Wachstum) geht.

Geometrische Folgen benutzt man, wenn das Wachstum proportional zur Grundmenge erfolgt (**exponentielles** Wachstum).

Ein typisches Beispiel ist die Zinsesformel $K_n = K_0(1+p)^n$ (K_0 Anfangskapital, p Zinssatz, K_n Kapital nach n Jahren).

An einer für Mitteleuropa typischen Stelle beträgt die Temperatur in 25 m Tiefe etwa 10^oC. Schätzen Sie die Temperatur in 10 km Tiefe, indem Sie von einem Zuwachs von 3K pro 100 m ausgehen.

In einer Nährlösung befinden sich 1000 Einzeller, bei denen es durchschnittlich alle 20 min zur Teilung kommt. Schätzen Sie die Zahl der Einzeller nach 24 h bei ungebremstem Wachstum ohne Tod.

Grenzwerte und Konvergenz

In einigen unserer Beispiele konnten wir feststellen, dass sich die Folgenglieder für große n immer weiter an eine feste Zahl annähern. Mathematisch wird dies mit den Begriffen **"Konvergenz"** und **"Grenzwert"** gefasst.

Konvergenz ist ein grundlegendes Prinzip der Analysis. Der Grenzbegriff in seiner modernen Form wurde erstmals durch L. A. Cauchy formuliert.

Grenzwerte und Konvergenz

In einigen unserer Beispiele konnten wir feststellen, dass sich die Folgenglieder für große n immer weiter an eine feste Zahl annähern. Mathematisch wird dies mit den Begriffen **"Konvergenz"** und **"Grenzwert"** gefasst.

Konvergenz ist ein grundlegendes Prinzip der Analysis. Der Grenzbegriff in seiner modernen Form wurde erstmals durch L. A. Cauchy formuliert.

Definition 1.7 (Grenzwert)

Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge (a_n), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

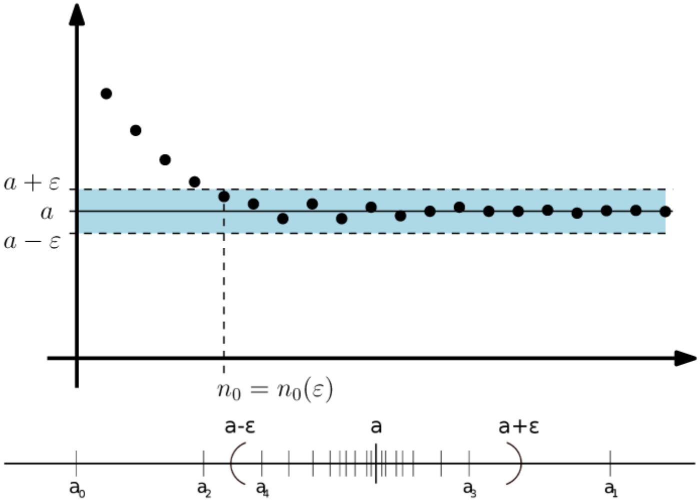
Besitzt die Folge (a_n) einen Grenzwert, so heißt sie konvergent, anderenfalls divergent.

Schreibweise:

- $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
- $a_n \to a$ für $n \to \infty$, oder $a_n \to a$.

Zum besseren Verständnis: Denken Sie vor allem an beliebig **kleine** $\varepsilon > 0$.

Graphische Illustration des Begriffs



Für hinreichend großes n liegen die Folgenglieder a_n beliebig nahe am Grenzwert a.

Beispiel

- $a_n = c \to c$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann $|a_n - c| = 0 < \varepsilon$ für alle n.
- $a_n = \frac{1}{n} \to 0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ dann gilt

$$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \text{ für } n \geq n_0.$$

- $a_n = \frac{n^2+1}{n^2} \to 1$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ dann gilt

$$|a_n - 1| = |\frac{n^2+1}{n^2} - 1| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \epsilon \text{ für } n \geq n_0.$$

Beispiel

- $a_n = c \to c$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann $|a_n - c| = 0 < \varepsilon$ für alle n.
- $a_n = \frac{1}{n} \to 0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ dann gilt

$$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \text{ für } n \geq n_0.$$

- $a_n = \frac{n^2+1}{n^2} \to 1$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ dann gilt

$$|a_n - 1| = |\frac{n^2+1}{n^2} - 1| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \epsilon \text{ für } n \geq n_0.$$

Satz 1.8

Der Grenzwert einer konvergenten Zahlenfolge ist eindeutig bestimmt.

Nullfolge

Definition 1.9

Eine Folge (a_n) heißt Nullfolge, wenn $a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Nullfolgen können für eine weitere Charakterisierung von Grenzwerten benutzt werden:

Satz 1.10

Eine Folge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist.

Dabei vereinbaren wir, dass arithmetische Operationen auf Folgen immer gliedweise zu verstehen sind.

$a_n = \frac{n+1}{n} \to 1,$

Nullfolge

Definition 1.9

Eine Folge (a_n) *heißt Nullfolge, wenn* $a_n \to 0$ *für* $n \to \infty$.

Nullfolgen können für eine weitere Charakterisierung von Grenzwerten benutzt werden:

Satz 1.10

Eine Folge (a_n) *ist genau dann konvergent, wenn* $(a_n - a)$ *eine Nullfolge ist.*

Dabei vereinbaren wir, dass arithmetische Operationen auf Folgen immer gliedweise zu verstehen sind.

$a_n = \frac{n+1}{n} \to 1$, denn $a_n - 1 = \frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n} \to 0$.

Cauchy Folge

Eng im Zusammenhang mit konvergenten Folgen steht folgender Begriff:

Definition 1.11 (Cauchy Folge)

Eine Folge (a_n) *heißt* *Cauchy-Folge, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0. \tag{1}$$

Bei einer Cauchy-Folge liegen also die Glieder für hinreichend große Indizes beliebig eng beisammen.

Der Bezug zur Konvergenz von reellen Zahlenfolgen lautet:

Satz 1.12

Eine **reelle** *Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Konvergenz, Monotonie, Beschränkheit

Satz 1.13

- *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
- *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Finden Sie eine Folge die konvergent, aber nicht monoton ist.

Begründen Sie mit Satz 1.13, dass die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $q > 1$ divergiert.

Rechnen mit konvergenten Folgen

Wir beginnen mit einigen Vergleichskriterien für Grenzwerte.

Satz 1.14

Gilt $a_n \to a,\ b_n \to b$, und ist fast immer $a_n \leq b_n$, so gilt auch $a \leq b$.

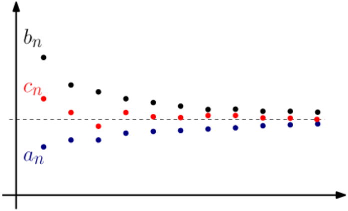
Achtung: Aus $a_n < b_n$ folgt dagegen i.a. **nicht** die strenge Beziehung $a < b$. Betrachte zum Beispiel die Folgen $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ und $b_n = 1 + \frac{1}{n}$.

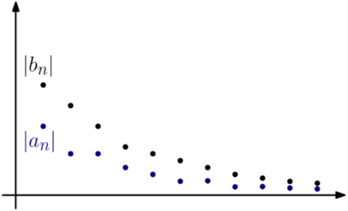
Folgerung 1.15 (Sandwichsatz)

Gilt $a_n \to a,\ b_n \to a$, und gilt ferner fast immer $a_n \leq c_n \leq b_n$, so gilt auch $c_n \to a$.

Folgerung 1.16

Ist (b_n) Nullfolge und gilt fast immer $|a_n| \leq |b_n|$, so ist auch (a_n) eine Nullfolge.





Satz 1.17

Ist (a_n) Nullfolge und (b_n) beschränkt, so ist (a_nb_n) wieder eine Nullfolge.

Satz 1.18 (Rechnenregeln für Grenzwerte)

Seien (a_n) *und* (b_n) *Zahlenfolgen mit* $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$. *Dann gilt*

- $a_n + b_n \to a + b$;
- $a_n - b_n \to a - b$;
- $a_n b_n \to ab$;
- $\lambda a_n \to \lambda a$ *für jede Konstante* $\lambda \in \mathbb{R}$.
- *Ist weiterhin* $b \neq 0$, *so gibt es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$, *so dass* $b_n \neq 0$ $(n \geq n_0)$. *Die Folge* $(b_n)_{n \geq n_0}$ *konvergiert mit* $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

Beispiel

Aus $\frac{1}{n} \to 0$ folgt z.B. $2 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^3} \to 2 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0^3 = 2$.

Bestimmte Divergenz

Definition 1.19

Eine Folge (a_n) *heißt* *bestimmt divergent* *gegen* $+\infty$, *wenn zu jeder Zahl* $C \in \mathbb{R}$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass*

$$a_n \geq C \quad \text{für} \quad n \geq n_0.$$

Eine Folge (a_n) *heißt* *bestimmt divergent* *gegen* $-\infty$, *wenn zu jeder Zahl* $C \in \mathbb{R}$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass*

$$a_n \leq C \quad \text{für} \quad n \geq n_0.$$

Schreibweise:

- $a_n \to +\infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
- $a_n \to -\infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Beispiel

Es gilt $n + 4 \to +\infty$ und $-n^2 + 3n \to -\infty$ für $n \to \infty$.

Bestimmte Divergenz

Einige Rechenregeln aus Satz 1.18 lassen sich teilweise auf bestimmt divergente Folgen übertragen. Dazu definiert man:

- $c + \infty = \infty + \infty = \infty$ für $c \in \mathbb{R}$;
- $c - \infty = -\infty - \infty = -\infty$ für $c \in \mathbb{R}$;
- $c \cdot \infty = \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$ für $c > 0$;
- $c \cdot \infty = (-\infty) \cdot \infty = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$ für $c < 0$;
- $c \cdot (-\infty) = -\infty$ für $c > 0$;
- $c \cdot (-\infty) = \infty$ für $c < 0$;
- $\frac{c}{\pm\infty} = 0$ für $c \in \mathbb{R}$.

Achtung: Ausdrücke wie $\infty - \infty,\ -\infty + \infty,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0(\pm\infty),\ \frac{\pm\infty}{0}$ sind unbestimmt und können nicht sinnvoll definiert werden.

Wichtige Beispiele

Für $a_k,\ b_l \neq 0$

$$\frac{\sum_{j=0}^{k} \alpha_j n^j}{\sum_{j=0}^{l} \beta_j n^j} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_k n^k}{\beta_0 + \beta_1 n + \ldots + \beta_l n^l} \to \begin{cases} 0, & \text{falls } k < l; \\ \frac{\alpha_k}{\beta_l}, & \text{falls } k = l; \\ \infty, & \text{falls } k > l,\ \frac{\alpha_k}{\beta_l} > 0; \\ -\infty, & \text{falls } k > l,\ \frac{\alpha_k}{\beta_l} < 0. \end{cases}$$

Wie lauten die Grenzwerte der Folgen

- $\left(\frac{n+3}{n^2+4n-1}\right)$;
- $\left(\frac{n^2+3}{5n^2-4n+1}\right)$;
- $\left(\frac{4n^3+1}{-8n+1}\right)$.

Wichtige Beispiele

Geometrische Folge

$$q^n \to \begin{cases} 0, & \text{für } |q| < 1; \\ 1, & \text{für } q = 1; \\ +\infty, & \text{für } q > 1. \end{cases}$$

Für $q \leq -1$ ist die Folge (q^n) divergent, aber nicht bestimmt divergent (alternierendes Vorzeichen).

Für $|q| < 1$ gilt im übrigen sogar $n^k q^k \to 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Das polynomielle Wachstum von n^k ist also schwächer als das exponentielle Abklingen von q^n.

Wichtige Beispiele

- $$n^r \to \begin{cases} +\infty, & \text{falls } r > 0; \\ 0, & \text{falls } r < 0. \end{cases}$$
- $$\sqrt[n]{c} \to 1 \text{ für jede Zahl } c > 0;$$
- $$\sqrt[n]{n} \to 1;$$
- $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e = 2.71828\ldots;$$
- $$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x.$$

Summen- und Produktzeichen

Definition 2.1 (Summen- und Produktzeichen)

Für $k \in \mathbb{N}$ seien a_k reelle Zahlen. Wir definieren

$$\textbf{Summe: } \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k,$$

$$\textbf{Produkt: } \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k = a_n \cdot \prod_{k=1}^{n-1} a_k,$$

wobei k heißt der **Laufindex.**

Bemerkung: Gilt $a_k = a$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n} a = n \cdot a \quad \text{sowie} \quad \prod_{k=1}^{n} a = a^n.$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{i=1}^{5} i = \frac{5 \cdot 6}{2} \qquad \prod_{k=1}^{5} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 = 5!.$$

Summen- und Produktzeichen

Bemerkung:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \quad \text{bzw.} \quad \prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n,$$

wobei $m, n \in \mathbb{Z},\ m \leq n$ sind **Summations**- bzw. **Produktsgrenzen.**

Beispiel

Sei $a_n := n + 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=5}^{7} a_n &= a_5 + a_6 + a_7 = 6 + 7 + 8 = 21, \\ \prod_{n=5}^{6} a_n &= a_5 \cdot a_6 = 6 \cdot 7 = 42. \end{aligned}$$

Exkurs: Induktionsprinzip

Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen gilt

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Das Induktionsprinzip in 3 Schritten:

- Induktionsannahme: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Exkurs: Induktionsprinzip

Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen gilt

$$1+2+3+\ldots+n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Das Induktionsprinzip in 3 Schritten:

- Induktionsannahme: $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$
- Induktionsstart: Wir zeigen dass die Annahme für $n=1$ gilt: $\sum_{i=1}^{1} i=\frac{n(n+1)}{2}=1$, stimmt also.

Exkurs: Induktionsprinzip

Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen gilt

$$1+2+3+\ldots+n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Das Induktionsprinzip in 3 Schritten:

- Induktionsannahme: $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$
- Induktionsstart: Wir zeigen dass die Annahme für $n=1$ gilt: $\sum_{i=1}^{1} i=\frac{n(n+1)}{2}=1$, stimmt also.
- Induktionsschritt: ausgehend von der Annahme zeigen wir, dass diese auch für $n=1$ gilt: $\sum_{i=1}^{n+1} i=(n+1)+\sum_{i=1}^{n} i \stackrel{IA}{=} (n+1)+\frac{n(n+1)}{2} \stackrel{rechnen}{=} \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

Exkurs: Induktionsprinzip

Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen gilt

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Das Induktionsprinzip in 3 Schritten:

- Induktionsannahme: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- Induktionsstart: Wir zeigen dass die Annahme für $n = 1$ gilt: $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{n(n+1)}{2} = 1$, stimmt also.
- Induktionsschritt: ausgehend von der Annahme zeigen wir, dass diese auch für $n = 1$ gilt: $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i \overset{IA}{=} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \overset{rechnen}{=} \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

Die Aussage gilt also für $n = 1$, und kann von jedem n auf seinen Nachfolger übertragen werden. Damit gilt die Aussage für $n = 2$, $n = 3$ usw; gesamt also für alle $n \in \mathbb{N}$

Summen- und Produktzeichen

Satz 2.2

Seien $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, *dann gilt*

- $$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k,$$
- $$\sum_{k=m}^{n} c a_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \forall c \in \mathbb{R},$$
- $$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{n} a_k \quad \forall m \leq r < n,$$
- $$\sum_{i=m}^{n} a_{i+q} = \sum_{k=m+q}^{n+q} a_k.$$

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1) =$$

Summen- und Produktzeichen

Satz 2.2

Seien $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, *dann gilt*

- $$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k,$$
- $$\sum_{k=m}^{n} c a_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \forall c \in \mathbb{R},$$
- $$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{n} a_k \quad \forall m \leq r < n,$$
- $$\sum_{i=m}^{n} a_{i+q} = \sum_{k=m+q}^{n+q} a_k.$$

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Beispiel

Transformieren Sie den Laufindex in der/dem Summe/Produkt.

- $\sum\limits_{k=2}^{9}(k+2)$, gemäß der Beziehung $l=k+1$.
- $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$, gemäß der Beziehung $l-1=k$.
- $\sum\limits_{p=5}^{n}p\cdot\prod\limits_{s=4}^{p}(s+2)^3$, gemäß der Beziehung $p+1=k$ und $s-2=t$.

Unendliche Reihen

Addieren wir von einer gegebenen Zahlenfolge (a_k) die jeweils ersten Glieder, so entstehen "Partialsummen":

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Diese Partialsummen bilden eine neue Folge (s_n) und führen uns zum Begriff der **(unendlichen) Reihe.**

Unendliche Reihen

Definition 2.3

Sei (a_k) *eine Zahlenfolge. Dann heißt*

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

die $n-$*te* *Partialsumme* *von* (a_k).

Die Folge (s_n) *wird* *Reihe* *mit den Gliedern* a_k *genannt. Man verwendet für sie die Schreibweise* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *heißt* *konvergent,* *wenn die zugehörige Partialsummenfolge konvergiert, andernfalls divergent.*

Gilt $s_n \to s$ *für* $n \to \infty$, *so schreibt man*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = s$$

und bezeichnet s *auch als* *Wert* *oder* *Summe* *der Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beispiel

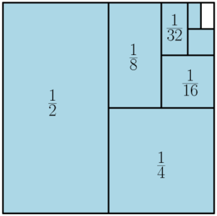
Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

konvergiert gegen 1. Man schreibt also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Es handelt sich hierbei um einen Spezialfall der "geometrischen Reihe", die uns später noch beschäftigen wird.



Beispiel

Die Partialsummen zur Folge (a_k) mit $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ sind gegeben durch

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Damit gilt $s_n \to 1$ für $n \to \infty$. Man schreibt also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Beweisen Sie die Formel für die Partialsummen mittels vollständiger Induktion.

Beispiel

Die zur Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \qquad (2)$$

gehörige Partialsummenfolge ist $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ und die Reihe ist damit *divergent*.

Dieses Beispiel zeigt eindrucksvoll, dass Reihen nicht einfach als "unendliche Summen" aufgefasst werden können:

Paarweises Zusammenfassen benachbarter Glieder $(1 - 1 = 0)$ in (2) könnte zum Beispiel zu völlig falschen Schlüssen führen!

Partialsummen arithmetischer Folgen

Erinnerung: Eine arithmetische Folge ist gekennzeichnet durch immer gleiche Differenz ihrer Folgenglieder.

Satz 2.4

Sei (a_k) *eine arithmetische Folge mit* $a_{k+1} - a_k = d$ *(also mit* $a_k = a_1 + (k-1)d$*). Dann gilt*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n(a_1 + \frac{1}{2}(n-1)d).$$

Partialsummen arithmetischer Folgen

Erinnerung: Eine arithmetische Folge ist gekennzeichnet durch immer gleiche Differenz ihrer Folgenglieder.

Satz 2.4

Sei (a_k) *eine arithmetische Folge mit* $a_{k+1} - a_k = d$ *(also mit* $a_k = a_1 + (k-1)d$*). Dann gilt*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n(a_1 + \frac{1}{2}(n-1)d).$$

Die zugehörige Reihe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ist daher immer divergent – mit Ausnahme des Falles $a_k = 0,\ k \in \mathbb{N}$, d.h. $a_1 = 0$ und $d = 0$.

Bei arithmetischen Folgen sind also nur die Partialsummen, aber nicht deren Grenzwerte interessant.

Geometrische Reihe

Die Reihe zur geometrischen Folge ist eine der wichtigsten in der Mathematik überhaupt. Auch hier beginnen wir wieder mit einer Aussage über die Darstellung der Partialsummen:

Satz 2.5

Sei (a_k) eine geometrische Folge mit $\frac{a_{k+1}}{a_k} = q$ (also mit $a_k = a_1 q^{k-1}$). Dann gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}, & \textit{falls } q \neq 1, \\ n a_1, & \textit{falls } q = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Beweisen Sie den Satz mittels vollständiger Induktion über n.

Geometrische Reihe

Mittels Grenzübergang $n \to \infty$ erhält man aus Formel (3):

Satz 2.6

Eine Reihe der Form $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$ heißt geometrische Reihe. Die geometrische Reihe konvergiert für $|q| < 1$, in diesem Fall gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1}{1-q}. \tag{4}$$

Für $|q| > 1$ ist die Reihe divergent.

Man berechne die Summen der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{7^{k-1}}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$.

Bemerkung: Sie können häufig auch die Formeln

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^k = a_1 \frac{q}{1-q} \quad \text{oder} \quad \sum_{l=0}^{\infty} a_0 q^l = a_0 \frac{1}{1-q}.$$

treffen. Diese erhält man aus (4) durch Multiplikation von a_1 mit q bzw. durch Indexverschiebung $l = k - 1$.

Harmonische Reihe

Definition 2.7 (Harmonische Reihe)

Eine Reihe der Form $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ *mit* $a > 0$ *wird* *harmonische Reihe* *genannt. Es gilt:*

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ *ist konvergent für alle* $a > 1$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} = +\infty$, *d.h. die Reihe divergiert, für alle* $a \leq 1$.

Insbesondere sind also die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergent, während $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Die Divergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ erfolg dabei extrem langsam; hier einige Zahlenwerte zur Illustration:

n	1	2	5	10	100	10^4	10^8
s_n	1	1.5	2.2833	2. 9290	5.1874	9.7876	18.9979

Rechnen mit konvergenten Reihe

Wendet man die Grenzwertsätzen (Satz 1.18) auf Partialsummenfolgen an, erhält man:

Satz 2.8

Sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ beide konvergent, so gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k; \\
\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k; \\
\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k) &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \textit{für } \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^k} + \frac{4}{3^k} \right)$.

Machen Sie sich anhand der Partialsummen klar, dass Aussage analog zu Satz 2.8 für $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cdot b_k)$ **nicht** gelten können.

Absolut konvergente Reihen

Definition 2.9

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, *wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.*

Absolut konvergente Reihen sind besonders komfortabel – zum Beispiel darf man nur bei ihnen die Glieder beliebig umordnen, ohne den Grenzwert zu verändern.

Der folgende Satz liefert den Bezug zur "gewöhnlichen" Konvergenz:

Satz 2.10

Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist erst recht konvergent. Für sie gilt die verallgemeinerte Dreieckungleichung

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Absolut konvergente Reihen

Beispiele

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ ist absolut konvergent. Es gilt

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \leq \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Konvergenzkriterien

Notwendiges Konvergenzkriterium

Mitunter stellt man lediglich die Frage nach der Konvergenz einer Reihe, ohne deren konkreten Grenzwert berechnen zu wollen.

Hierbei helfen sogenannte *Konvergenzkriterien.* Einen ersten Satz erhalten aus dem Cauchy-Kriterium für die Partialsummenfolge zu einer konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Es gilt

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| \leq \varepsilon \quad \text{für großes } n$$

und daher

Satz 2.11 (Notwendiges Konvergenzkriterium)

Bei einer konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bilden die Glieder eine Nullfolge, d.h. $a_k \to 0$ für $k \to \infty$.

Kann die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$ konvergieren? Gilt die Umkehrung von Satz 2.11? Wenn nicht, finden Sie Gegenbeispiele.

Konvergenzkriterien

Leibniz-Kriterium

Für alterierende Reihen, d.h. mit wechselndem Vorzeichen der Glieder, ist das folgende Kriterium häufig hilfreich:

Satz 2.12 (Leibniz-Kriterium)

Eine alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ *konvergiert, wenn* (a_k) *eine* **monotone** *Nullfolge ist.*

Was lässt sich über die Konvergenz der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5k^2}$ sagen? Konvergieren diese Reihen auch absolut?

Konvergenzkriterien

Majoranten- und Minorantenkriterium

Nach Satz 1.13 ist eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern genau dann konvergent wenn ihre Partialsummenfolge beschränkt ist. Daraus folgt:

Satz 2.13 (Majorantenkriterium)

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *eine konvergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern, und gilt fast immer* $|a_k| \leq b_k$, *so konvergiert* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, *und zwar sogar absolut.*

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *wird dabei Majorante von* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *genannt.*

Konvergenzkriterien

Majoranten- und Minorantenkriterium

Nach Satz 1.13 ist eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern genau dann konvergent wenn ihre Partialsummenfolge beschränkt ist. Daraus folgt:

Satz 2.13 (Majorantenkriterium)

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *eine konvergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern, und gilt fast immer* $|a_k| \leq b_k$*, so konvergiert* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*, und zwar sogar absolut.*

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *wird dabei Majorante von* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *genannt.*

Satz 2.14 (Minorantenkriterium)

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *eine divergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern, und gilt fast immer* $a_k \geq b_k$*, dann ist auch* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent.*

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *wird dabei Minorante von* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *genannt.*

Konvergenzkriterien

Beispiel

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ konvergiert, denn $\frac{1}{k^2+k} \leq \frac{1}{k^2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Beispiel

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$ divergiert, denn $\frac{1}{k+\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k+k} = \frac{1}{2k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ divergiert.

Konvergenzkriterien

Quotientenkriterium

Durch Verwendung von geometrischen Reihen als Majoranten bzw. Minoranten erhält man zwei Kriterien, die häufig bei Reihengliedern mit Quotienten-/Potenzstruktur greifen:

Satz 2.15 (Quotientenkriterium)

Gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, *und zwar sogar absolut. Gilt jedoch*

$$\liminf_{k\to\infty} = \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1,$$

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent.*

Dabei ist natürlich vorauszusetzen, dass $a_k \neq 0$ ist.

Satz 2.16 (Wurzelkriterium)

Gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1,$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, *und zwar sogar absolut. Gilt*

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1,$$

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent.*

Achtung: Es reicht **nicht,** lediglich $\sqrt[k]{|a_k|} < 1$ bzw. $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ nachzuweisen, um auf Konvergenz zu schließen!

Testen Sie dies am Beispiel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k}$.

Konvergenzkriterien

Quotienten- und Wurzelkriterium

Folgende Version von Quotienten- und Wurzelkriterium ist besonders handlich und wird in der Praxis am häufigsten verwendet:

Folgerung 2.17

Konvergiert die Quotientenfolge $\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)$ *oder die Wurzelfolge* $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)$ *gegen einen Grenzwert* a*, so ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

- *(absolut) konvergent, wenn* $a < 1$;
- *divergent, wenn* $a > 1$.

Bemerkung: Im Falle $a = 1$ liefern die Kriterien kein Ergebnis. Eine nähere Untersuchung wird notwendig.

Konvergenzkriterien

Es sollen zwei weirere Kriterien erwähnt werden:

Satz 2.18 (Vergleichskriterium)

Sei (a_k) *eine Zahlenfolge in* $\mathbb{R}$ *und* (b_k) *eine Zahlenfogle in* $\mathbb{R}^+$*. Falls* $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ *so dass* $\forall k \geq k_0 : a_k > 0$ *und* $q := \frac{a_k}{b_k}$ *existiert, so gilt:*
Ist $q > 0$ *so konvergiert* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *genau dann, wenn* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergiert.*
Ist $q = 0$ *und ist* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergent, so konvergiert auch* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Satz 2.19 (Verdichtungssatz)

Sei (a_k) *eine monoton fallende Zahlenfolge in* $\mathbb{R}_0^+$*.Dann gilt:*
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist konvergent genau dann, wenn* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *konvergent ist.*

Potenzreihen

Definition 2.20

Sei (a_k), $k \in \mathbb{N}_0$, *eine Folge in* $\mathbb{R}$ *und* x_0 *in* $\mathbb{R}$. *Unter der* **Potenzreihe** *mit koeffizienten* (a_k) *versteht man die Funktionenreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Man kann analog komplexe Potenzreihen definieren und schreibt meist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k \in \mathbb{C} \forall k \in \mathbb{N}, \quad z, z_0 \in \mathbb{C}$$

Potenzreihen sind in vielerlei hinsicht nützlich, zB zur Lösung von Gleichungen, Approximation von Funktionen sowie in Differential- und Integralrechnung.

Definition 2.21

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *eine Potenzreihe. Dann existiert ein* $\rho \in [0,\infty]$, *genannt* **Konvergenzradius**, *mit folgenden Eigenschaften:*

- $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x-x_0| > \rho \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *divergiert*
- $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x-x_0| < \rho \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *konvergiert absolut*

Es gilt $\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$. *Existiert* $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$, *so gilt* $\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$.

Man beachte den zusammenhang mit Wurzel- bzw. Quotientenkriterium!

Sei gegeben $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k} x^k$. Dann ist der Konvergenzradius um $x_0 = 0$

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{\frac{k+1}{2^k}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{2^k}}{\sqrt[k]{k+1}} = \frac{2}{1}$$

Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen / Tutorien)

- wissen, was man unter Folgen und Reihen versteht,
- die Grenzwertdefinition tiefgehend verstanden haben und beherrschen (auswendig!),
- Grenzwerte von Folgen mit Hilfe der Grenzwertsätze sicher berechnen können,
- an einfachen Beispielen Vergleichskriterien anwenden können (gilt für Folgen und Reihen),
- über die Konvergenzeigenschaften von geometrischer und harmonischer Reihen bescheidwissen,
- anhand von Konvergenzkriterien das Konvergenzverhalten von Reihen analysieren können.

Sie sind sich nicht sicher oder meinen "nein"? Werden Sie aktiv!