Grundlagen

Mathematik I für Chemiker

Daniel Gerth

Überblick Allgemeine Grundlagen

Dieses Kapitel erklärt:

- Wie man mathematische Sätze durch Aussagen formulieren kann;
- Wie man einfache bis mäßig schwierige logische Zusammenhänge und Schlüsse erfassen kann;
- Wie mathematische Theorie im allgemeinen aufgebaut ist;
- Wie man mit reellen Zahlen, Gleichungen und Ungleichungen umgeht;
- Wie man Zahlenbereiche axiomatisch aufbauen kann;
- Wie man das bisher vermittelte Wissen in den Naturwissenschaften verwenden kann.

Inhaltsverzeichnis

Grundlagen

Werfen Sie einen kurzen Blick auf folgende Konstruktion:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 :\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$.

Grundlagen

Werfen Sie einen kurzen Blick auf folgende Konstruktion:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 :\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$.

Möglicherweise bewegen Sie jetzt Fragen wie

- Wie kann man jemals einen solchen Ausdruck durchblicken?
- Wozu muss man sich überhaupt derart kompliziert ausdrücken?

Grundlagen

Werfen Sie einen kurzen Blick auf folgende Konstruktion:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 :\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$.

Möglicherweise bewegen Sie jetzt Fragen wie

- Wie kann man jemals einen solchen Ausdruck durchblicken?
- Wozu muss man sich überhaupt derart kompliziert ausdrücken?

Wahrscheinlich ist Ihnen aufgefallen, dass die Umgangssprache für eine präzise Beschreibung nicht ausreicht. Wir brauchen eine Fachsprache zur mathematischen Kommunikation. Diese muss erst erlernt werden.

Elemente der Aussagenlogik

Definition 1.1 (Aussage)

Eine Aussage p ist ein sprachliches oder formelmäßiges Gebilde, dem man entweder den Wahrheitswert "wahr" oder "falsch" zuordnen kann.

Sprechweisen

- "p ist wahre (richtige) Aussage" / "p gilt"
- "p ist falsche Aussage" / "p gilt nicht"

Gemäß dieser Definition kann keine Aussage gleichzeitig wahr oder falsch sein.

Sind folgende Konstrukte Aussagen? Was ist ggf. ihr Wahrheitswert?

"Die Erde ist eine Scheibe"; "Wie soll ich bloß die Prüfung schaffen?"; "$62 = 36$"; "$7 = \sqrt{48}$"; "$\sqrt{14}$"; "Wir befinden uns in Wien oder Salzburg"; "Wirklich?"

Durch Verknüpfungen (Junktoren) lassen sich aus einfachen Aussagen komplizierte bilden. Eine Aussageverknüpfung liefert eine neue Aussage, deren Wahrheitswert sich aus den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagen ergibt.

Seien p und q Aussagen, dann heißt

- $\bar{p}$ (auch $\neg p$) Negation (Verneinung) von p (sprich: "nicht p"),
- $p \vee q$ Disjunktion von p und q (sprich: "p oder q (oder beide)"),
- $p \wedge q$ Konjunktion von p und q (sprich: "p und q").

Die Wahrheitswerte werden durch folgende Tabellen festgeschrieben:

p	$\neg p$
w	f
f	w

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
w	w	w	w
w	f	w	f
f	w	w	f
f	f	f	f

Beachten Sie den rot markierten Wahrheitswert bei "oder" - umgangssprachlich meint man mitunter nicht dasselbe (ausschließendes Oder)!

Geben Sie den Wahrheitswert der Aussage **"Wir gehen nach der VO in die Mensa oder nach Hause"** in Abhängigkeit von der tatsächlich durchgeführten Aktivitäten an. Machen Sie sich den Unterschied zur Umgangssprache klar.

Ein zentrales Element beim Aufbau mathematischer Theorie ist das logische Schließen. Dafür benötigen wir zwei weitere Verknüpfungen.

Seien p und q Aussagen, dann heißt

- $p \Rightarrow q$ Implikation (sprich: "Aus p folgt q"; "Wenn p gilt, so gilt q"),
- $p \Leftrightarrow q$ Äquivalenz (sprich: "p gilt **genau** dann, wenn q gilt").

Eine Implikation ist genau dann falsch, wenn man aus **wahren** Aussagen die falschen Schlüsse zieht (p wahr, q falsch).

Eine Äquivalenz bedeutet, dass p und q immer den gleichen Wahrheitswert besitzen (wie das Gleichheitszeichen für Zahlen).

Wichtig sind aber folgende alternative Sprechweisen:

- für $p \Rightarrow q$: "p ist hinreichend für q" oder "q ist notwendig für p",
- für $p \Leftrightarrow q$: "p ist hinreichend und notwendig für q"

und folgender Satz.

Satz 1.2

Seien p und q Aussagen. Dann gilt:

- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ *und* $(q \Rightarrow p)$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Beispiel

Geben Sie an, ob die folgenden Bedingungen jeweils **notwendig, hinreichend** oder **hinreichend und notwendig** sind:

- Bedingung: x ist eine ganze Zahl, deren letzte Ziffer Null ist.
  Aussage: x ist durch 10 teilbar

Wichtig sind aber folgende alternative Sprechweisen:

- für $p \Rightarrow q$: "p ist hinreichend für q" oder "q ist notwendig für p",
- für $p \Leftrightarrow q$: "p ist hinreichend und notwendig für q"

und folgender Satz.

Satz 1.2

Seien p und q Aussagen. Dann gilt:

- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ *und* $(q \Rightarrow p)$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Beispiel

Geben Sie an, ob die folgenden Bedingungen jeweils **notwendig, hinreichend** oder **hinreichend und notwendig** sind:

- Bedingung: x ist eine ganze Zahl, deren letzte Ziffer Null ist.
  Aussage: x ist durch 10 teilbar $\Longrightarrow$ hinreichend und notwendig
- Bedingung: x ist eine ganze Zahl.
  Aussage: x ist durch 4 teilbar

Wichtig sind aber folgende alternative Sprechweisen:

- für $p \Rightarrow q$: "p ist hinreichend für q" oder "q ist notwendig für p",
- für $p \Leftrightarrow q$: "p ist hinreichend und notwendig für q"

und folgender Satz.

Satz 1.2

Seien p und q Aussagen. Dann gilt:

- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ *und* $(q \Rightarrow p)$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Beispiel

Geben Sie an, ob die folgenden Bedingungen jeweils **notwendig, hinreichend** oder **hinreichend und notwendig** sind:

- Bedingung: x ist eine ganze Zahl, deren letzte Ziffer Null ist.
  Aussage: x ist durch 10 teilbar $\Longrightarrow$ hinreichend und notwendig
- Bedingung: x ist eine ganze Zahl.
  Aussage: x ist durch 4 teilbar $\Longrightarrow$ notwendig
- Bedingung: x und y sind ungerade Zahlen.
  Aussage: $x + y$ ist eine gerade Zahl

Wichtig sind aber folgende alternative Sprechweisen:

- für $p \Rightarrow q$: "p ist hinreichend für q" oder "q ist notwendig für p",
- für $p \Leftrightarrow q$: "p ist hinreichend und notwendig für q"

und folgender Satz.

Satz 1.2

Seien p und q Aussagen. Dann gilt:

- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ *und* $(q \Rightarrow p)$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Beispiel

Geben Sie an, ob die folgenden Bedingungen jeweils **notwendig, hinreichend** oder **hinreichend und notwendig** sind:

- Bedingung: x ist eine ganze Zahl, deren letzte Ziffer Null ist.
  Aussage: x ist durch 10 teilbar $\Longrightarrow$ hinreichend und notwendig
- Bedingung: x ist eine ganze Zahl.
  Aussage: x ist durch 4 teilbar $\Longrightarrow$ notwendig
- Bedingung: x und y sind ungerade Zahlen.
  Aussage: $x + y$ ist eine gerade Zahl $\Longrightarrow$ hinreichend

Satz 1.3

Es seien p, q und r beliebige Aussagen. Dann gelten immer:

1. **Doppelte Verneinung**
$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$$
2. **Satz vom ausgeschlossenen Dritten**
$$p \vee \neg p$$
3. **Kommutativgesetze**
$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p), \quad (p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$
4. **Assoziativgesetze**
$$[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)], \quad [(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$$
5. **Distributivgesetze**
$$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)], \quad [p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$
6. **De Morgansche Regeln**
$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q), \quad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q).$$

Die Eigenschaften verifizieren Sie an einem Beispiel im ersten Übungsblatt.

Definition 1.4 (Aussageform)

Eine Aussageform ist ein Gebilde, welches eine oder mehrere Variablen enthält, und das nach dem Ersetzen der Variablen durch konkrete Werte in eine Aussage übergeht.

Schreibweise: $p(x)$, falls x als Variable verwendet wird.

Mit $p(x)$ sei die Aussageform $x \leq 1$ bezeichnet, wobei x eine reelle Variable sei. Wie lauten die Aussagen $p(0)$ und $p(4)$ und was ist Wahrheitswert?

Definition 1.4 (Aussageform)

Eine Aussageform ist ein Gebilde, welches eine oder mehrere Variablen enthält, und das nach dem Ersetzen der Variablen durch konkrete Werte in eine Aussage übergeht.

Schreibweise: $p(x)$, falls x als Variable verwendet wird.

Mit $p(x)$ sei die Aussageform $x \leq 1$ bezeichnet, wobei x eine reelle Variable sei. Wie lauten die Aussagen $p(0)$ und $p(4)$ und was ist Wahrheitswert?

Eine weitere Möglichkeit, Aussageformen in Aussagen zu überführen, ist die Bindung der Variablen an Quantoren. Die wichtigsten sind:

- $\forall -$ "für alle... gilt ..."
- $\exists -$ "es existiert (mindestens) ein ..., so dass ..."
- $\exists! -$ "es existiert **nur** ein ..., so dass ..."

- Es gibt eine reelle Zahl x mit $x^2 = -1$,
- Es gibt genau eine reelle Zahl $r > 0$ mit $r \cdot r = 2$.

Definition 1.5

Sei $p(x)$ eine Aussageform, dann meinen wir mit

- *der Negation von* **"Für alle x gilt $p(x)$"** *die Aussage* **"Es existiert ein x, für das $p(x)$ nicht gilt".**
  Symbolisch: $\neg(\forall x: \ p(x)) := (\exists x: \ \neg p(x))$,
- *der Negation von* **"Es existiert ein x, für das $p(x)$ gilt"** *die Aussage* **"Für alle x gilt $p(x)$ nicht".**
  Symbolisch: $\neg(\exists x: \ p(x)) := (\forall x: \ \neg p(x))$.

Beispiel

Formulieren Sie die Negationen von

- "Alle Professoren unterrichten Mathematik"

Definition 1.5

Sei $p(x)$ eine Aussageform, dann meinen wir mit

- *der Negation von* **"Für alle x gilt $p(x)$"** *die Aussage* **"Es existiert ein x, für das $p(x)$ nicht gilt".**
  Symbolisch: $\neg(\forall x: \ p(x)) := (\exists x: \ \neg p(x))$,
- *der Negation von* **"Es existiert ein x, für das $p(x)$ gilt"** *die Aussage* **"Für alle x gilt $p(x)$ nicht".**
  Symbolisch: $\neg(\exists x: \ p(x)) := (\forall x: \ \neg p(x))$.

Beispiel

Formulieren Sie die Negationen von

- "Alle Professoren unterrichten Mathematik"
  Negation: "Es gibt einen Professor, der nicht Mathematik unterrichtet".
- $\exists x \in M: \ x > 5$

Definition 1.5

Sei $p(x)$ eine Aussageform, dann meinen wir mit

- *der Negation von* **"Für alle x gilt $p(x)$"** *die Aussage* **"Es existiert ein x, für das $p(x)$ nicht gilt".**
  Symbolisch: $\neg(\forall x:\ p(x)) := (\exists x:\ \neg p(x))$,
- *der Negation von* **"Es existiert ein x, für das $p(x)$ gilt"** *die Aussage* **"Für alle x gilt $p(x)$ nicht".**
  Symbolisch: $\neg(\exists x:\ p(x)) := (\forall x:\ \neg p(x))$.

Beispiel

Formulieren Sie die Negationen von

- "Alle Professoren unterrichten Mathematik"
  Negation: "Es gibt einen Professor, der nicht Mathematik unterrichtet".
- $\exists x \in M:\ x > 5$
  Negation: $\forall x \in M : x \leq 5$.
- Es gibt eine reelle Zahl x mit $x^2 = -1$
  Negation: ???

Gerüstet mit diesen Vorkenntnissen lassen sich die gebräuchlichen Sprachkonstrukte der Mathematik grob typisieren.

Ein Axiom ist eine Aussage, die innerhalb einer Theorie nicht begründet oder hergeleitet wird. Axiome werden beweislos vorausgesetzt.

Beispiel: Kommutativgesetze für reelle Zahlen, siehe später.

Ein Satz ist eine Aussage, die mittels eines Beweises als wahr erkannt wurde. Den Beweis bildet dabei eine Kette von Schlussfolgerungen, die nur von Axiomen oder bereits bewiesenen Sätzen ausgeht.

Beispiel: "$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl".

Gebräuchliche Ausprägungen von Sätzen sind auch

- Lemma (Hilfssatz) – ein Satz, der als Zwischenstufe in einem Beweis dient.
- Korollar (Folgerung) – ein Satz, der ohne großen Beweisaufwand aus einem anderen folgt.

Die Abgrenzung zum Satz ist jeweils fließend und subjektiv.

Eine Definition dient zur Festlegung eines mathematischen Begriffs. Hier sind eher Wertungen wie "sinnvoll/nicht sinnvoll" statt "wahr/falsch" angebracht. Sinnvolle Definitionen erfüllen unter anderem folgende Anforderungen:

- Widerspruchsfreiheit,
- Zirkelfreiheit (das zu Definierende darf nicht selbst Bestandteil der Definition sein),
- Angemessenheit (nicht zu eng und nicht zu weit gefasst),
- Redundanzfreiheit (keine Bestandteile enthalten, die aus anderen logisch folgen).

Häufig schreibt man Definitionen in der Form von Gleichungen oder Äquivalenzen und verwendet die Symbole $:=$ und $:\Leftrightarrow$. Der zu definierende Ausdruck steht immer auf der Seite des Doppelpunkts.

Beispiel (Definition)

$a^0 := 1$ für $a \in \mathbb{R}$.

Zum mathematischen Wahrheitsbegriff

Da in der Mathematik **alle** Aussagen per logischem Schluss bewiesen werden, entsteht ein sehr scharfer Wahrheitsbegriff.

In den (experimentellen) Naturwissenschaften ist der Wahrheitsbegriff stärker an Beobachtungen gekoppelt und daher weniger scharf.

Die Mathematik ist also im logischen Sinne präziser, dies erfordert aber eben auch eine kompliziertere Fachsprache.

Für unsere Vorlesung: Ein strenger Aufbau der Theorie kostet Zeit und ist nicht Aufgabe des Anwenders, daher folgender Kompromiss:

- Reihenfolge von Axiomen, Sätzen und Definitionen entspricht weitgehend dem strengen Aufbau der Theorie,
- Beweise und Beweisideen werden meist ausgelassen
- Es werden grundlegende Ideen, Begriffe, Vorgehensweisen und Techniken erläutert - verwenden Sie bei Interesse entsprechende Literatur

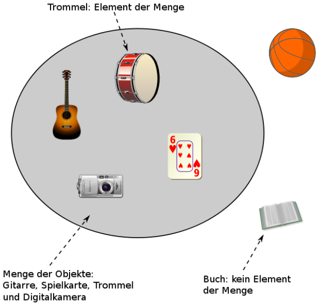
Elemente der Mengenlehre

Definition 2.1 ("naive" Mengedefinition, G. Cantor, 1895)

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Die erwähnten Objekte heißen Elemente dieser Menge M.

Schreibweise: $x \in M$ (bzw. $x \notin M$).



Quelle: Wikipedia

Darstellungsmöglichkeiten für Mengen

- aufzählende Darstellung – die Elemente werden explizit aufgelistet, z. B.:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Linz; Wien; Salzburg; Innsbruck}\}, \\ B &= \{1; 4; 6; 8\}. \end{aligned}$$

- beschreibende Darstellung – die Elemente werden durch eine Eigenschaft charakterisiert, z. B.:

$$\begin{aligned} A &= \{x : \ x \text{ ist Bürger von Österreich}\}, \\ B &= \{x : \ x \text{ ist reelle Zahl und } x < 5\}, \\ C &= \{p : \ p \text{ ist Primzahl und } p < 10\}. \end{aligned}$$

Die Gesamtheit, die kein Element enthält heißt leere Menge.

Schreibweise: $\emptyset$ oder $\{\}$.

Mengenbeziehungen

Seien A und B Mengen.

- A heißt Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.
  Schreibweise: $A \subseteq B$.
- A und B heißen gleich, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und umgekehrt.
  Schreibweise: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.
- A heißt echte Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist, und ein Element von B existiert, das nicht zu A gehört ($A \subseteq B$ und $A \neq B$).
  Schreibweise: $A \subset B$.

Die Teilmengen einer Menge M können wiederum zur sogenannten Potenzmenge zusammengefasst werden:

$$P(M) := \{A : \ A \subset M\}.$$

Man gebe die Potenzmenge von $A = \{1; 2; 4\}$ an.

Mengenoperationen

Seien A und B Teilmengen einer Grundmenge X. Dann heißt

- $A \cup B := \{x : \; x \in A \vee x \in B\}$ die Vereinigung von A und B;
- $A \cap B := \{x : \; x \in A \wedge x \in B\}$ die Durchschnitt von A und B;
- $A \setminus B := \{x : \; x \in A \wedge x \notin B\}$ die Differenz von A und B (sprich: "A weniger B");
- $\bar{A} := X \setminus A$ das Komplement von A in X.

Beispiel

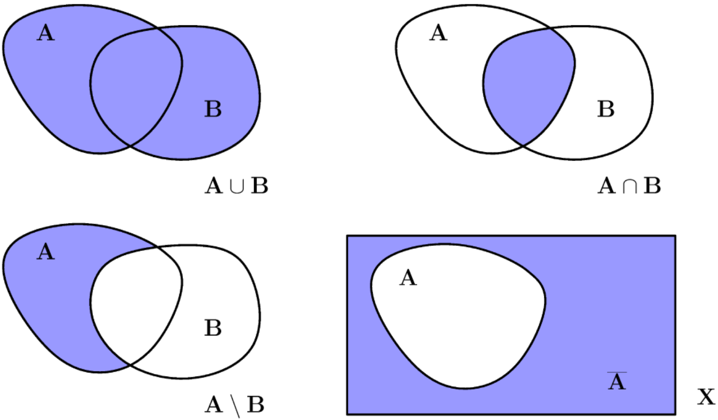
- Für alle Mengen M gilt: $\emptyset \in M$;
- Sei $M = \{1; 2\}$ und $N = \{1; 2; 3\}$. Dann gilt $M \subset N, \; N \not\subset M$, also $N \neq M$;
- Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

- Geben Sie zu $M = \{1; 2; 3\}$ und $N = \{2; 4; 7\}$ die Mengen $M \cup N, \; M \cap N, \; M \setminus N$ und $N \setminus M$ an.
- Wie lauten Vereinigung und Durchschnitt der Mengen

$$\begin{aligned} C &= \{p : \; p \text{ ist Primzahl } \} \text{ und} \\ D &= \{p : \; p \text{ ist Primzahl und } p < 10\}. \end{aligned}$$

Mengenoperationen

Visualisierung: Venn-Diagramm



Vereinigung ($\cup$), Schnitt ($\cap$) bzw. Komplement wurden letztlich über die logischen Junktoren "oder" ($\vee$), "und" ($\wedge$) bzw. Negation definiert. Daher gelten für Mengenoperationen analoge Regeln zu Satz 1.3:

Satz 2.2 (Regeln für das Operieren mit Mengen)

Es seien A, B, C Mengen. Dann gelten:

1. **Kommutativgesetze**
$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$$
2. **Assoziativgesetze**
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
3. **Distributivgesetze**
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
4. $A \cap A = A, \quad A \cup A = A;$
5. $A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A;$
6. $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset, \quad A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B;$
7. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C), \quad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$

Diese Eigenschaften verifizieren Sie im ersten Übungszettel.

Das kartesische Produkt

Seien A und B Mengen, dann heißt die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ kartesisches Produkt von A und B, kurz

$$A \times B := \{(a, b) : \ a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Analog definiert man für Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \ a_1 \in A_1, \ a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

und schreibt im Falle der Gleichheit aller A_i kürzer

$$A^n := A \times A \times \ldots A \quad (n \text{ Faktoren}).$$

Als wichtigste Beispiele werden uns $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ begegnen – das sind die Entsprechungen von Anschauungsebene und -raum.

Beispiel

Wir beweisen das Kommutativgesetz aus Satz 2.2. Es folgt

$$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \Leftrightarrow (x \in B) \wedge (x \in A) \Leftrightarrow x \in (B \cap A).$$

Zahlenmengen und Rechentechniken

Obwohl **jeder** von uns schon seit Jahren reelle Zahlen verwendet, fällt es uns extrem schwer, das Wesen der Zahl in Worte zu fassen.

Es lohnt sich also eine nähere Betrachtung – gerade auch weil Messwerte für viele physikalische Größen als reelle Zahlen aufgefasst werden können.

Einen (eher historisch interessanten) Anfangspunkt liefert uns folgendes berühmte wie umstrittene Zitat:

"Die natürlichen Zahlen hat Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk".
(Leopold Kronecker, deutscher Mathematiker, 1823-1891)

Skizzieren wir zunächst das klassische Vorgehen über Zahlbereichserweiterungen.

Wir starten mit

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}-$ natürliche Zahlen ("hat Gott gemacht" oder werden über Peano-Axiome beschrieben).
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Skizzieren wir zunächst das klassische Vorgehen über Zahlbereichserweiterungen.

Wir starten mit

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}-$ natürliche Zahlen ("hat Gott gemacht" oder werden über Peano-Axiome beschrieben).
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Nach Einführung der Addition stellt man fest, dass Gleichungen wie $x + n = 0$ in $\mathbb{N}$ nicht lösbar sind, daher Erweiterung zu

- $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}-$ ganze Zahlen.

Skizzieren wir zunächst das klassische Vorgehen über Zahlbereichserweiterungen.

Wir starten mit

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}-$ natürliche Zahlen ("hat Gott gemacht" oder werden über Peano-Axiome beschrieben).
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Nach Einführung der Addition stellt man fest, dass Gleichungen wie $x + n = 0$ in $\mathbb{N}$ nicht lösbar sind, daher Erweiterung zu

- $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}-$ ganze Zahlen.

Nimmt man die Multiplikation hinzu, sind wiederum Gleichungen wie $q \cdot x = 1,\ q \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar, daher Erweiterung zu

- $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p,\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}-$ rationale Zahlen (alle endlichen und periodischen Dezimalbrüche).

Wählt man die Zahlengerade als Modell, so kann man mit den rationalen Zahlen zumindest beliebig feine Einteilungen realisieren.

Die reellen Zahlen

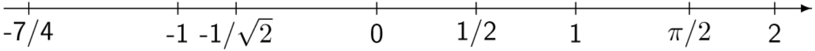
Aber: Reicht die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ immer noch nicht aus, um einfache Gleichungen der Form $x \cdot x = n$ mit $n \in \mathbb{N}$ zu lösen.

Bereits Euklid (ca. 360-280 v. Chr.) überlieferte uns den Beweis zu

Satz 3.1

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, *d.h.* $\sqrt{2}$ *ist keine rationale Zahl.*

Die rationalen Zahlen erfassen also nicht die gesamte Zahlengerade. Erst durch "Vervollständigen" gelangt man zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.



Jedem Punkt der Zahlengeraden entspricht genau eine reelle Zahl.

Moderner axiomatischer Ansatz

Klassische Zahlbereichserweiterungen sind anschaulich, erweisen sich aber im Detail als kompliziert, z. B. bei

- Einführung von Addition und Multiplikation sowie der damit verbundenen Rechengesetze,
- Einführung einer Ordnungsrelation ("größer/kleiner"),
- Ausformulieren des Vervollständigungsschritts.

Moderne Ansätze definieren daher $\mathbb{R}$ direkt über Axiome, die unmittelbar die Rechengesetze liefern. Man benötigt:

- Körperaxiome (liefern Rechengesetze),
- Anordnungsgesetze (liefern Ordnungsrelation),
- Volständigkeitsaxiom.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ werden als entsprechende Teilmengen von $\mathbb{R}$ aufgefasst. Wir verzichten auf eine formale Angabe der Axiome, geben aber die unmittelbar resultierenden Gesetze an.

Die arithmetischen Gesetze in $\mathbb{R}$

1. **Assoziativgesetz der Addition**
$$(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$
2. **Neutrales Element der Addition**
$$a+0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$
3. **Inverse Elemente der Addition**
$$a+(-a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$
4. **Kommutativgesetz der Addition**
$$a+b = b+a \quad \forall a,\ b \in \mathbb{R}.$$
5. **Assoziativgesetz der Multiplikantion**
$$(ab)c = a(bc) \quad \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$
6. **Neutrales Element der Multiplikantion**
$$a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$
7. **Inverse Elemente der Multiplikantion**
$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$
8. **Kommutativgesetz der Multiplikation**
$$ab = ba \quad \forall a,\ b \in \mathbb{R}.$$
9. **Distributivgesetz**
$$a(b+c) = ab+ac \quad \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

Diese Gesetze korrespondieren mit den Körperaxiomen. Eine Menge, die die Körperaxiome füllt, heißt: (Zahlen)Kö

Wir definieren für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$a^n := a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad (n \text{ Faktoren}),\ a^0 := 1$$

und, falls $a > 0$:

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}.$$

Dann folgen aus den arithmetischen Gesetzen weitere Rechenregeln:

Satz 3.2

Für alle $a,\ b \in \mathbb{R}$ *gelten*

- $a \cdot 0 = 0,$
- $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ *oder* $b = 0,$
- $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ *oder* $a = -b,$
- $-(-a) = a, \quad -(a+b) = -a - b,$
- $(-a)b = a(-b) = -ab, \quad (-a)(-b) = ab,$
- $a^n a^m = a^{n+m} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$ *(falls* $a \neq 0$*),*
- $a^n b^n = (ab)^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ *(falls* $a,\ b \neq 0$*).*

Die Ordnungsrelation in $\mathbb{R}$

10. Zwischen zwei reellen Zahlen a und b besteht immer genau eine der folgenden drei Größenbeziehungen:

$$a < b \text{ } (a \text{ kleiner } b), \quad a = b \text{ } (a \text{ gleich } b), \quad a > b \text{ } (a \text{ größer } b).$$

11. **Transitivität**

$$(a < b \text{ und } b < c) \quad \Rightarrow \quad a < c \quad \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R},$$

12. **Monotonie der Addition**

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a + c < b + c \quad \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R},$$

13. **Monotonie der Multiplikaiton**

$$(a < b \text{ und } c > 0) \quad \Leftrightarrow \quad ac < bc \quad \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

Definition 3.3

- *$a \leq b$ (a kleiner oder gleich b) bedeutet $a < b$ oder $a = b$.*
- *$a \geq b$ (a größer oder gleich b) bedeutet $a > b$ oder $a = b$.*

Diese Gesetze korrespondieren mit den Anordnungsaxiomen. Körper, die die Anordnungsaxiome erfüllen, heißen geordnete Körper. Beispiele sind $\mathbb{R}$, aber auch $\mathbb{Q}$.

Aus den Anordnungsaxiomen folgen weiterhin die Regeln für den Umgang mit Ungleichungen:

Satz 3.4

Für $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ *gelten:*

- $a \leq b$ *und* $c \leq d \quad \Rightarrow \quad a + c \leq b + d$,
- $a \leq b$ *und* $c < 0 \quad \Rightarrow \quad ac \geq bc$ *und* $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$,
- $a \leq b \quad \Rightarrow \quad -b \leq -a$,
- $0 \leq a \leq b \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$,
- $a \leq b < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$,
- $a < 0 < b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$.

Finden Sie die Lösungen der Ungleichung $\frac{x-1}{x+3} < 2 \quad (x \neq -3)$.

Beispiel

Für welche Werte von x gilt:

$$\frac{1}{x-1} < \frac{3}{4x-7}.$$

Für $x = 1$ und $x = \frac{7}{4}$ wird einer der Nenner Null. Da die Division durch Null im Bereich der reellen Zahlen ausgeschlossen ist, fallen diese beiden $x-$Werte aus den Betrachtungen heraus, sie sind keine Lösungen.

Wir machen eine Fallunterscheidung:
1. Fall: $x > \frac{7}{4}$. Im Gebiet $x > \frac{7}{4}$ sind $(x-1) > 0$ und $(4x-7) > 0$. Damit ist $(x-1)(4x-7) > 0$. Multiplikation mit diesem Faktor ergibt:

$$4x - 7 < 3x - 3 \quad \Rightarrow \quad x < 4.$$

2. Fall: $1 < x < \frac{7}{4}$. Im Gebiet $1 < x < \frac{7}{4}$ sind $(x-1) > 0$ und $(4x-7) < 0$. Damit ist $(x-1)(4x-7) < 0$. Multiplikation mit diesem Faktor ergibt:

$$4x - 7 > 3x - 3 \quad \Rightarrow \quad x > 4.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $x < \frac{7}{4}$, d.h. der 2. Fall führt zu keiner Lösung der Ungleichung.
3. Fall: $x < 1$. Im Gebiet $x < 1$ sind $(x-1) < 0$ und $(4x-7) < 0$. Damit ist $(x-1)(4x-7) > 0$. Multiplikation mit diesem Faktor ergibt:

$$4x - 7 < 3x - 3 \quad \Rightarrow \quad x < 4.$$

Zusammenfassung: Die Ungleichung ist erfüllt für $x < 1$ und $\frac{7}{4} < x < 4$.

Definition 3.5 (Obere und untere Schranken)

Sei $M \neq \emptyset$, eine Teilmenge der reellen Zahlen.

- *M heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ gibt mit*

  $$x \leq C \text{ für alle } x \in M.$$

  Jede solche Zahl C heißt obere Schranke von M. Die kleinste obere Schranke einer nach oben beschränkten Menge M heißt Supremum von M
  Schreibweise: $\sup M$.

- *M heißt nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ gibt mit*

  $$x \geq C \text{ für alle } x \in M.$$

  Jede solche Zahl C heißt untere Schranke von M. Die größte untere Schranke einer nach unten beschränkten Menge M heißt Infimum von M
  Schreibweise: $\inf M$.

M heißt beschränkt, wenn M sowohl nach oben wie auch nach unten beschränkt ist. Gilt $\sup M \in M$ ($\inf M \in M$), so heißt $\sup M (\inf M)$ auch Maximum (Minimum) von M.

Ist die Menge

$$M_1 := \left\{ \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$$

beschränkt? Geben Sie falls möglich obere und untere Schranken, Supremum und Infimum sowie Maximum und Minimum an.

Beispiel

Wir betrachten

$$M_2 := \{q \in \mathbb{Q} : \ q^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}.$$

Offenbar ist M_2 nach oben beschränkt, denn 10 ist obere Schranke. Ein Supremum besitzt die Menge in den **rationalen** Zahlen jedoch nicht, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

In den **reellen** Zahlen ist die Angabe des Supremums jedoch unproblematisch:

$$\sup M_2 = \sqrt{2}.$$

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Das letzte Beispiel liefert den Schlüssel für den noch fehlenden Vervollständigungsschritt bei der Konstruktion von $\mathbb{R}$.

Satz 3.6 (Die Vollständigkeit)

(14) *Jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum in* $\mathbb{R}$.

Folgerungen:

- Jede nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Infimum in $\mathbb{R}$.
- Jede beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum und ein Infimum in $\mathbb{R}$.

Damit ist die axiomatische Konstruktion von $\mathbb{R}$ komplett. Kurz zusammenfassen kann man (1)-(14) in folgendem Satz:

Satz 3.7

$\mathbb{R}$ *ist ein ordnungsvollständiger geordneter Körper.*

Intervalle

Intervalle sind "zusammenhängende" Teilmengen von $\mathbb{R}$. Es wird dabei nach Inklusion der Randpunkte unterschieden.
Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$:

- **Abgeschlossenes Intervall**

$$[a, b] \ := \ \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\},$$

- **Halboffene Intervalle**

$$\begin{aligned} (a, b] &= \,]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq b\}, \\ [a, b) &= [a, b[\,:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\}, \end{aligned}$$

- **Offenes Intervall**

$$(a, b) \ = \,]a, b[\,:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\},$$

- **Unbeschränkte Intervalle**

$$\begin{aligned} [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x\}, \\ (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x\}, \\ (-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq b\}, \\ (-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < b\}, \\ (-\infty, \infty) &:= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Auf dem Zahlenstrahl lassen sich Intervalle als zusammenhängende Bereiche darstellen.

Betrag

Der **Betrag** von $a \in \mathbb{R}$ ist durch

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{für } a \geq 0, \\ -a, & \text{für } a < 0 \end{cases} \qquad \text{definiert.}$$

Satz 3.8 (Rechnen mit Beträgen)

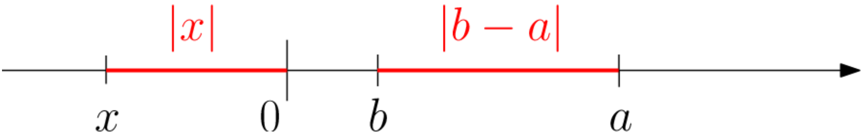
Für $a, b \in \mathbb{R},\ c \geq 0$ *gelten*

- $|a| \geq 0,$ *wobei* $|a| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0,$
- $|a| = c \quad \Rightarrow \quad a = c$ *oder* $a = -c,$
- $|a| = |-a|$ *und* $|a-b| = |b-a|,$
- $|ab| = |a||b|,$
- **Dreiecksungleichung**
  $$|a+b| \leq |a| + |b|,$$
- $|a| \leq c \quad \Leftrightarrow \quad -c \leq a \leq c.$

Betrag und Abstand

Für den Betrag gibt es eine einfache, aber wichtige Interpretation am Zahlenstrahl. Für $a, b \in \mathbb{R}$

- gibt $|a|$ den Abstand von a zur Null an,
- gibt $|a-b| = |b-a|$ den Abstand zwischen a und b an.



Für welche ganzzahligen n gelten die Ungleichung

$$\left|\frac{1}{n+1}\right| < 10^{-10}.$$

Permutationen

Problemstellung: Gegeben sind $n \in \mathbb{N}$ (verschiedene) Elemente. **Auf wieviele verschiedene Arten kann man diese Elemente in einer Reihe anordnen?** Gefragt ist also nach der Anzahl der **Permutationen** von n Elementen.

Permutationen

Problemstellung: Gegeben sind $n \in \mathbb{N}$ (verschiedene) Elemente. **Auf wieviele verschiedene Arten kann man diese Elemente in einer Reihe anordnen?** Gefragt ist also nach der Anzahl der **Permutationen** von n Elementen.

Satz 4.1

Sei P_n die Anzahl der Permutationen von n **verschiedenen** *Elementen. Dann ist*

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Permutationen

Problemstellung: Gegeben sind $n \in \mathbb{N}$ (verschiedene) Elemente. **Auf wieviele verschiedene Arten kann man diese Elemente in einer Reihe anordnen?** Gefragt ist also nach der Anzahl der **Permutationen** von n Elementen.

Satz 4.1

Sei P_n die Anzahl der Permutationen von n **verschiedenen** *Elementen. Dann ist*

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Seien a, b, c 3 Elemente. Es gibt folgende Anordnungen: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Laut Formel: $P_3 = 3! = 6$

Permutationen

Problemstellung: Gegeben sind $n \in \mathbb{N}$ (verschiedene) Elemente. **Auf wieviele verschiedene Arten kann man diese Elemente in einer Reihe anordnen?** Gefragt ist also nach der Anzahl der **Permutationen** von n Elementen.

Satz 4.1

Sei P_n die Anzahl der Permutationen von n **verschiedenen** *Elementen. Dann ist*

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Seien a, b, c 3 Elemente. Es gibt folgende Anordnungen: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Laut Formel: $P_3 = 3! = 6$

Hinweis an dieser Stelle: Es gilt $0! := 1$

Permutationen

Was aber, wenn man gewisse Elemente nicht unterscheiden kann?

Satz 4.2

Sei P_n die Anzahl der Permutationen von n Elementen, **von denen jeweils n_1, n_2, $_3$,usw... Elemente einander gleich sind. Dann gilt**

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots}$$

Seien a, b, b 3 Elemente. Es gibt folgende Anordnungen: abb, bab, bba. Laut Formel: $P_3 = \frac{3!}{2!} = 2$

Variationen

Problem: Gegeben sind n Elemente. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus diesen Elementen i Elemente herauszupicken und in verschiedener Weise anzuordnen?

Variationen

Problem: Gegeben sind n Elemente. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus diesen Elementen i Elemente herauszupicken und in verschiedener Weise anzuordnen?

Satz 4.3

Sei $V_{n,i}$ die Anzahl Variationen von n **voneinander verschiedene** *Elementen zur i-ten Klasse. Dann gilt*

$$V_{n,i} = \frac{n!}{(n-i)!}$$

Variationen

Problem: Gegeben sind n Elemente. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus diesen Elementen i Elemente herauszupicken und in verschiedener Weise anzuordnen?

Satz 4.3

Sei $V_{n,i}$ die Anzahl Variationen von n **voneinander verschiedene** *Elementen zur i-ten Klasse. Dann gilt*

$$V_{n,i} = \frac{n!}{(n-i)!}$$

Seien a, b, c, d 4 gegebene Elemente. Dann gibt es folgende Möglichkeiten, 2 dieser Elemente herauszugreifen und anzuordnen:
ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc
Laut Formel: $V_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$.

Variationen

Problem: Gegeben sind n verschiedene Elemente. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus diesen Elementen i Elemente herauszupicken und in verschiedener Weise anzuordnen, **wenn jedes Element beliebig oft verwendet werden kann**?

Variationen

Problem: Gegeben sind n verschiedene Elemente. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus diesen Elementen i Elemente herauszupicken und in verschiedener Weise anzuordnen, **wenn jedes Element beliebig oft verwendet werden kann**?

Satz 4.4

Sei $\bar{V}_{n,i}$ die Anzahl Variationen von n **voneinander verschiedene** *Elementen zur i-ten Klasse mit Wiederholung. Dann gilt*

$$\bar{V}_{n,i} = n^i$$

Variationen

Problem: Gegeben sind n verschiedene Elemente. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus diesen Elementen i Elemente herauszupicken und in verschiedener Weise anzuordnen, **wenn jedes Element beliebig oft verwendet werden kann**?

Satz 4.4

Sei $\bar{V}_{n,i}$ die Anzahl Variationen von n **voneinander verschiedene** *Elementen zur i-ten Klasse mit Wiederholung. Dann gilt*

$$\bar{V}_{n,i} = n^i$$

Seien a, b, c, d 4 gegebene Elemente. Dann gibt es folgende Möglichkeiten, 2 dieser Elemente herauszugreifen und anzuordnen:
ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc, aa, bb, cc, dd
Laut Formel: $\bar{V}_{4,2} = 4^2 = 16$.

Kombinationen

Problem: Gegeben sind n verschiedene Elemente. Auf wieviele Arten lassen sich aus ihnen i Elemente herausgreifen, wenn es auf die Reihenfolge der herausgegriffenen Elemente nicht ankommt und jedes Element nur einmal vorkommen darf?

Kombinationen

Problem: Gegeben sind n verschiedene Elemente. Auf wieviele Arten lassen sich aus ihnen i Elemente herausgreifen, wenn es auf die Reihenfolge der herausgegriffenen Elemente nicht ankommt und jedes Element nur einmal vorkommen darf?

Satz 4.5

Sei $C_{n,i}$ die Anzahl Kombinationen von n voneinander verschiedenen Elementen zur i-ten Klasse. Dann gilt

$$C_{n,i} = \binom{n}{i} := \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n! \cdot (n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \ldots [n-(i-1)]!}{i!}$$

Kombinationen

Problem: Gegeben sind n verschiedene Elemente. Auf wieviele Arten lassen sich aus ihnen i Elemente herausgreifen, wenn es auf die Reihenfolge der herausgegriffenen Elemente nicht ankommt und jedes Element nur einmal vorkommen darf?

Satz 4.5

Sei $C_{n,i}$ die Anzahl Kombinationen von n voneinander verschiedenen Elementen zur i-ten Klasse. Dann gilt

$$C_{n,i} = \binom{n}{i} := \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n! \cdot (n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \ldots [n-(i-1)]!}{i!}$$

Seien a, b, c, d 4 gegebene Elemente. Dann gibt es folgende Möglichkeiten, 2 dieser Elemente herauszugreifen und ohne Wiederholung ohne Beachtung der Reihenfolge anzuordnen:

ab, ac, ad, bc, bd, cd

Laut Formel: $\bar{C}_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$.

Kombinationen

Problem: Gegeben sind n verschiedene Elemente. Auf wieviele Arten lassen sich aus ihnen i Elemente herausgreifen, wenn es auf die Reihenfolge der herausgegriffenen Elemente nicht ankommt und jedes Element nur einmal vorkommen darf?

Satz 4.5

Sei $C_{n,i}$ die Anzahl Kombinationen von n voneinander verschiedenen Elementen zur i-ten Klasse. Dann gilt

$$C_{n,i} = \binom{n}{i} := \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n! \cdot (n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \ldots [n-(i-1)]!}{i!}$$

Seien a, b, c, d 4 gegebene Elemente. Dann gibt es folgende Möglichkeiten, 2 dieser Elemente herauszugreifen und ohne Wiederholung ohne Beachtung der Reihenfolge anzuordnen:

ab, ac, ad, bc, bd, cd

Laut Formel: $\bar{C}_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$.

Der Ausdruck $\binom{n}{i}$ heißt **Binomialkoeffizient**.

Kombinationen

Problem: Gegeben sind n verschiedene Elemente. Auf wieviele Arten lassen sich aus ihnen i Elemente herausgreifen, wenn es auf die Reihenfolge der herausgegriffenen Elemente nicht ankommt und jedes Element beliebig oft verwendet werden darf?

Kombinationen

Problem: Gegeben sind n verschiedene Elemente. Auf wieviele Arten lassen sich aus ihnen i Elemente herausgreifen, wenn es auf die Reihenfolge der herausgegriffenen Elemente nicht ankommt und jedes Element beliebig oft verwendet werden darf?

Satz 4.6

Sei $\bar{C}_{n,i}$ die Anzahl Kombinationen von n voneinander verschiedenen Elementen zur i-ten Klasse. Dann gilt

$$\bar{C}_{n,i} = \binom{n+i-1}{i}$$

Kombinationen

Problem: Gegeben sind n verschiedene Elemente. Auf wieviele Arten lassen sich aus ihnen i Elemente herausgreifen, wenn es auf die Reihenfolge der herausgegriffenen Elemente nicht ankommt und jedes Element beliebig oft verwendet werden darf?

Satz 4.6

Sei $\bar{C}_{n,i}$ die Anzahl Kombinationen von n voneinander verschiedenen Elementen zur i-ten Klasse. Dann gilt

$$\bar{C}_{n,i} = \binom{n+i-1}{i}$$

Seien a, b, c, d 4 gegebene Elemente. Dann gibt es folgende Möglichkeiten, 2 dieser Elemente herauszugreifen und ohne Wiederholung ohne Beachtung der Reihenfolge anzuordnen:

ab, ac, ad, bc, bd, cd, aa, bb, cc, dd

Laut Formel: $\bar{C}_{4,2} = \binom{4+2-1}{2} = \frac{5!}{6!2!} = 10.$

Kurzübersicht

Anzahl der Möglichkeiten, aus n Elementen i Elemente auszuwählen und anzuordnen

	Variation (MIT Reihenfolge)	Kombination (OHNE Reihenfolge)
ohne Wiederholung	$V_{n,i} = \frac{n!}{(n-i)!}$	$C_{n,i} = \binom{n}{i}$
mit Wiederholung	$\bar{V}_{n,i} = n^i$	$\bar{C}_{n,i} = \binom{n+i-1}{i}$

Binomischer Lehrsatz

Satz 4.7

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. *Dann gilt für alle* $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Dabei ist

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} a^0 b^{n-0} + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} a^n b^{n-n}$$

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen / Tutorien)

- sicher mit reellen Zahlen, Gleichungen und Ungleichungen umgehen können,
- Überblickswissen über den Aufbau mathematischer Theorie im allgemeinen besitzen,
- eine grobe Vorstellung vom axiomatischen Aufbau von Zahlenbereichen haben,
- einfache bis mäßig schwierige logische Zusammenhänge und Schlüsse erfassen können,
- einfache Aufgabenstellungen der Kombinatorik selstständig lösen können,
- erste Vorstellungen entwickelt haben, wozu man das bisher vermittelte Wissen in den Naturwissenschaften braucht.

Sie sind sich nicht sicher oder meinen "nein"? Dann werden Sie aktiv!