Integralrechnung von Funktionen einer Variablen

Daniel Gerth

Überblick Integralrechnung

Dieses Kapitel erklärt:

- Die Berechnung von Flächen unter dem Graphen einer Funktion und den Begriff des bestimmten Integrals;
- Die Bildung der Stammfunktion als Umkehrung der Differentiation und den Begriff des unbestimmten Integrals;
- Rechenregeln für den Umgang mit Integralen;
- Wie man die Berechnung des bestimmten Integrals in der Praxis nährungsweise durchführen kann, wenn theoretische Hilfsmittel versagen;
- Wie man unter Umständen auch dann die Fläche unter einem Graphen berechnen kann, wenn sich diese bis ins Unendlich erstreckt.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung. Motivation

Das Integral ist eine **lineare Abbildung,** die einer Funktion auf einem gegebenen Integrationsintervall eine Zahl (die Fläche zwischen $x-$Achse und Funktionsgraph; bestimmtes Integral) oder eine Funktion (Stammfunktion; unbestimmtes Integral) zuordnet.

Die Integralrechnung bildet das **Gegenstück zur Differentialrechnung.**

Das klingt vermutlich nicht wirklich motivierend, aber es stecken wunderbare Dinge dahinter verborgen, welche die Integration auch zu einem großartigen Helfer in der Praxis machen.

Einleitung. Motivation

Das Integral ist eine **lineare Abbildung,** die einer Funktion auf einem gegebenen Integrationsintervall eine Zahl (die Fläche zwischen $x-$Achse und Funktionsgraph; bestimmtes Integral) oder eine Funktion (Stammfunktion; unbestimmtes Integral) zuordnet.

Die Integralrechnung bildet das **Gegenstück zur Differentialrechnung.**

Das klingt vermutlich nicht wirklich motivierend, aber es stecken wunderbare Dinge dahinter verborgen, welche die Integration auch zu einem großartigen Helfer in der Praxis machen.

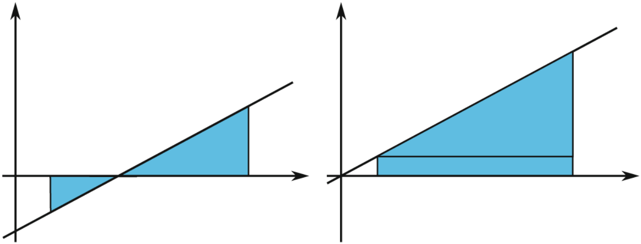
Integration scheint also eng mit der Beschreibung der Natur verknüpft zu sein. Das ist es auch wirklich; so hatte schon Newton der Integralrechnung tiefe Einblicke zu verdanken.

Wesentliche klassische Ideen zum Integralbegriff stammen von einem Großmeister der Mathematik: **Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866).**

Motivierende Problemstellung

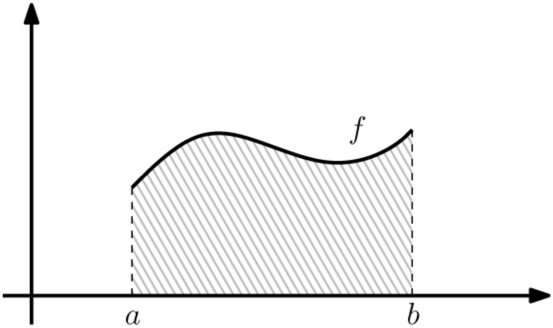
Wie berechnet man die Fläche zwischen der $x-$Achse und dem Graphen einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$?

Ist der Graph eine Gerade, so lässt sich die Fläche einfach durch Dreiecke und Rechtecke zusammensetzen.



Motivierende Problemstellung

Bei komplizierteren Funktionen ist dies **nicht so einfach.**



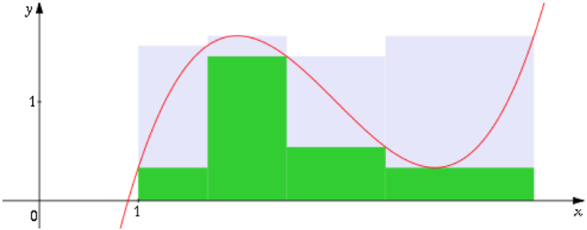
Ideen zum Integralbegriff basieren darauf, die Fläche zwischen einer Funktion und der $x-$Achse von oben und unten durch Rechtecke zu approximieren.

Lösungsstrategie

Einfach ist das Problem für stückweise konstante Funktionen, da sich dann der Flächeninhalt aus Rechtecken zusammensetzt.

Daher schachtelt man die Fläche unter dem Graphen von f von oben und unten mit Rechteckflächen ein und gewinnt so obere und untere Schranken.

Können sich die grauen und grünen Rechteckflächen von oben und unten beliebig weit demselben Wert nähern, so ist dieser die gesuchte Fläche.



Definition 1.1

Wir nennen $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine Treppenfunktion, wenn es eine Zerlegung*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

des Intervalls $[a, b]$ *in viele (*n *Stück) gleich große Teilintervalle mit Randpunkten* a *und* b *gibt, so dass* t *auf jedem der (offenen) Teilintervalle* (x_i, x_{i+1}) *konstant ist, d.h.*

$$t(x) = \xi_i \text{ für alle } x \text{ mit } x_i < x < x_{i+1}.$$

Die Grundflächen sind dann jeweils

$$\Delta x := \frac{b-a}{n},$$

die Randpunkte

$$x_i = a + i\Delta x \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

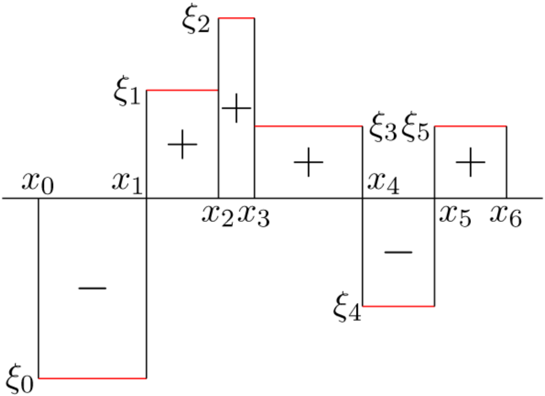
und die Fläche der n *Rechtecke*

$$F_i = t(x_{i-1})\Delta x.$$

Für eine solche Treppenfunktion t *setzt man*

$$\int_a^b t(x)dx := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta x \right).$$

Geometrische Interpretation



$\int_a^b t(x)dx$ entspricht dem gewichteten Flächeninhalt zwischen dem Graph t und der $x-$Achse. Dabei werden Flächen oberhalb der $x-$Achse positiv, unterhalb der $x-$Achse negativ gezählt.

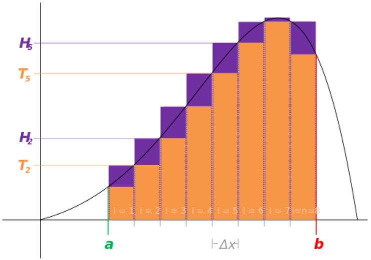
Definition 1.2 (Ober- und Unterintegral)

Zu jeder beschränkten Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ können wir nun zwei Zahlen definieren, nämlich das Oberintegral

$$\bar{I}_f := \inf \left\{ \int_a^b t(x)dx : \ t \textit{ Treppenfunktion auf } [a, b] \textit{ mit } t \geq f \right\}$$

und das Unterintegral

$$\underline{I}_f := \sup \left\{ \int_a^b t(x)dx : \ t \textit{ Treppenfunktion auf } [a, b] \textit{ mit } t \leq f \right\}$$



Damit sind alle Vorarbeiten zur Definition des Integrals erledigt.

Definition 1.3 (Riemann-Integral)

Eine auf $[a,b]$ beschränkte Funktion f heißt auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar, falls das Ober- und das Unterintegral übereinstimmen, d.h. falls $\bar{I}_f = \underline{I}_f =: I$.

Der gemeinsame Wert wird bestimmtes Riemann-Integral von f über $[a,b]$ genannt und mit

$$\int_a^b f(x)dx$$

bezeichnet.

a heißt untere und b obere Integrationsgrenze, und $[a,b]$ wird Integrationsintervall genannt. x heißt Integrationsvariable und $f(x)$ Integrand.

Konvention

$$\int_a^a f(x)dx := 0 \text{ und } \int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx \quad \text{(falls } a < b\text{)}.$$

Statt Ober- und Untersummen kann man allgemeine Zerlegungen betrachten:

Definition 1.4 (Riemann-Integral, alternative Definition)

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *heißt über dem Intervall* $[a, b]$ *Riemann-integrierbar, wenn es zu einer festen Zahl* A *und zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass für jede Zerlegung des Intervalls* $[a, b]$ *mit* $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ *mit* $max_{0 \leq i \leq n} |x_{i-1} - x_i| \leq \delta$ *und für beliebige Zwischenstellen* $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n$ *mit* $x_{i-1} \leq \hat{x}_i \leq x_i$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *gilt*

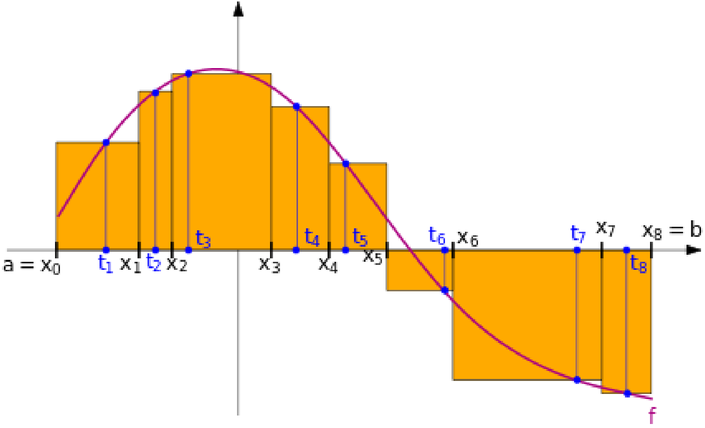
$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)(x_{i-1} - x_i) - A \right| < \epsilon.$$

Der gemeinsame Wert A *bestimmtes Riemann-Integral von* f *über* $[a, b]$ *genannt und mit*

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

bezeichnet.

Beispiel für eine Zerlegung und Stützstellen



Definition 1.4 liefert zwar kaum Anhaltspunkte für eine konkrete Berechnung von Integralen, aber bereits einige Rechenregeln:

Satz 1.5 (Rechenregeln für die Integration I)

Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar, so auch* $\max\{f, g\},\ \min\{f, g\},\ |f|,\ f \pm g$ *und* $f \cdot g$.

Es gelten die folgenden Integrationsregeln:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f \pm g)(x)dx &= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx, \\ \int_a^b (\lambda f)(x)dx &= \lambda \int_a^b f(x)dx \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Satz 1.6 (Rechenregeln für die Integration II)

Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ für alle } c \in (a, b).$$

Falls $f \leq g$ *auf* (a, b) *gilt, so folgt*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Insbesondere folgt aus $c \leq f(x)$ *bzw.* $f(x) \leq C$ *für alle* $x \in (a, b)$:

$$c(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \text{ bzw. } \int_a^b f(x)dx \leq C(b-a).$$

Außerdem gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Was bedeuten diese Aussagen geometrisch?

Integrierbarkeit

Satz 1.7

Ist f **stetig** *auf $[a, b]$, so ist f auch integrierbar auf $[a, b]$.*

Satz 1.8

Ist f **monoton** *auf $[a, b]$, so ist f auch integrierbar auf $[a, b]$.*

Natürlich gehört aber bei weitem nicht jede auf $[a, b]$ integrierbare Funktion in eine dieser beiden Klassen.

Für stetige Funktionen gilt desweiteren:

Satz 1.9 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Stammfunktionen und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Bislang haben wir noch gar nicht darauf eingegangen, wie man den Integrale **konkret berechnet.**

Dazu benötigen wir den Begriff der Stammfunktion sowie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Letzterer besagt, dass das Integrieren – unter gewissen Voraussetzungen und grob gesprochen – eine Art Umkehrung des Differenzierens ist.

Definition 2.1 (Stammfunktion)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Man nennt eine differenzierbare Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, wenn

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in [a,b].$$

Ist $F_1(x)$ eine Stammfunktion von f, so auch $F_2(x) = F_1(x) + c$ für beliebige Konstanten c. (Warum?)

Weitere Stammfunktionen gibt es allerdings nicht.

Beispiel

Es sei $f(x) := x^2$. Dann sind beispielsweise die Funktionen $F_1,\ F_2$, gegeben durch

$$F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}$$

und

$$F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}$$

Stammfunktionen von f, denn durch Ableitungen erkennen wir

$$F_1'(x) = f(x) \quad \text{und} \quad F_2'(x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Stammfunktionen werden auch als unbestimmte Integrale genannt und häufig in der Form

$$F(x) = \int f(x)dx + c$$

geschrieben. Die Konstante c heißt Integrationskonstante.

Satz 2.2 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Teil I)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ **stetig**, *dann ist die durch*

$$F: [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f(s)ds,$$

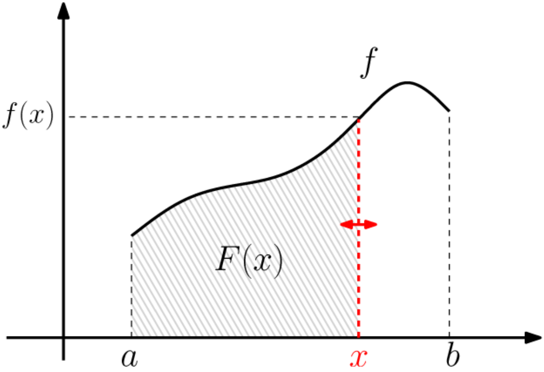
definierte Funktion in $[a,b]$ *differenzierbar, und es gilt*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(s)ds\right) = f(x).$$

Sämtliche Stammfunktionen einer stetigen Funktionen sind konsequenterweise von der Bauart

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds + c.$$

Graphische Darstellung



Dargestellt ist eine stetige Funktion f und ihre Stammfunktion F gemäß Satz 2.3 als Maß der schraffierten Fläche.

Elementare Funktionen und ihre Stammfunktionen

Welche Funktionen f besitzen nun eine Stammfunktion F und wie sehen diese aus? Wir notieren weiterhin folgende Stammfunktionen $F(x) = \int f(x)dx$ elementarer Funktionen f. Zum Beweis leite man einfach $\int f(x)dx$ ab und stelle fest, dass das Ergebnis der Funktion f entspricht.

$f(x)$	a	$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{1}{x}$	e^x
$F(x)$	$ax + c$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$e^x + c$
$f(x)$	$\sin(ax) \ (a \neq 0)$	$\cos(ax) \ (a \neq 0)$	$\ln(x)$	
$F(x)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax) + c$	$\frac{1}{a}\sin(ax) + c$	$x(\ln(x) - 1) + c$	

Aus den Regeln für Ableitungen ergeben sich schließlich folgende Regeln für Stammfunktionen (bis auf Integrationskonstanten):

- $\int (\lambda f)(x)dx = \lambda \int f(x)dx$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Es ist anzumerken, dass die Berechnung von Stammfunktionen im Allgemeinen viel schwieriger (*"Integrieren ist eine Kunst"*) ist als Differenzieren. Daher gibt es z. Z. Hunderte Seiten dicke Integraltafeln.

Deren Bedeutung hat sich allerdings in den letzten Jahrzehnten mit der Verfügbarkeit von PC und numerischen Verfahren deutlich relativiert.

Gesucht ist das unbestimmte Integral der Funktion

$$f(x) = 3x^2 + 4\sin(2x).$$

Satz 2.3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Teil II)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und F eine (beliebige) Stammfunktion von f, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b := F(b) - F(a).$$

Erarbeiten Sie sich die Beweisidee anhand der Definition von F selbst.

Man berechne

- $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx$ mit Hilfe von Satz 2.3,
- $\frac{d}{dx} \int\limits_{-1}^{x} te^{2t}dt.$

Wichtige Regeln zur Integration

Partielle Integration

Wir nennen eine Funktion $f:\ D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, wenn sie auf D differenzierbar, und die Ableitung f' stetig ist.

In diesem Abschnitt wollen wir darauf eingehen, wie möglichst geschickt ein Integral berechnet werden kann. Leider ist dies nämlich allgemein nicht einfach. Allerdings gibt es hilfreiche Regeln, die vieles leichter machen und Integrale oft bereits bekannte zurückführen.

Der folgende Satz bildet eine Art "Umkehrung" der Produktregel:

Satz 3.1 (Partielle Integration)

Seien $f, g:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \tag{1}$$

und

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \tag{2}$$

Beispiel

Bei der Integration von xe^x wählen wir $f'(x) = e^x$ und $g(x) = x$, d.h. $f(x) = e^x$ und $g'(x) = 1$. Demnach ist

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + c.$$

Man berechne folgende Integrale mittels partieller Integration:

- $\int\limits_0^\pi x\sin(x)dx$,
- $\int \ln x dx$,
- $\int \cos^2(x)dx$,
- $\int e^x(2-x^2)dx$.

Substitutionsregel

Durch "Umkehrung" der Kettenregel entsteht folgender Satz:

Satz 3.2

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi: [a,b] \to I$ stetig differenzierbar. Dann gelten:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx \tag{3}$$

und

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \tag{4}$$

Die Formeln (3) und (4) merken sich besonders gut in Leibniz-Notation, wenn man $x = \varphi(t)$ und $dx = \varphi'(t)dt$ setzt.

Beispiel

Substituiert man in

$$\int_1^2 \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx$$

$y = \varphi(x) = \ln(x)$, so erhält man wegen $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$ mittels (4)

$$\int_1^2 \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx = \int_0^{\ln 2} \cos(y) dy = \sin(y)|_0^{\ln 2} \approx \sin(\ln 2) \approx 0.6339.$$

Im Leibniz-Notation würde man die erste Gleichheit gewinnen, wenn man $y = \ln x$ setzt und aus $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ dann auf $dy = \frac{1}{x} dx$ schließt.

Beispiel

Wir integrieren

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt,$$

indem wir $t := \sin(x)$ substituieren. Dann ist nämlich

$$\frac{dt}{dx} = \cos(x) \text{ bzw. } dt = \cos(x)dx$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt &= \int_{\arcsin(-1)}^{\arcsin(1)} \sqrt{1-\sin^2(x)}\,\cos(x)dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(x)}\,\cos(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx. \end{aligned}$$

Das letztere Integral hatten wir schon ausgewertet. Es ergibt sich also

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}(t+\sin(t)\cos(t))|_{-1}^{1}.$$

Bemerkung: Ohne Integrationsgrenzen, also bei der Bestimmung eines unbestimmten Integrals, muss nach der Substitution die erhaltene Stammfunktion wieder in Abhängigkeit der alten Variablen gebracht werden.

Weitere nützliche Regeln

- Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $r \in \mathbb{R}$ $(r \neq -1)$ und f^r auf $[a,b]$ definiert. Dann gilt

$$\int f'(x)(f(x))^r dx = \frac{1}{1+r}(f(x))^{r+1} + c.$$

- Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + c.$$

Man berechne folgende Integrale

- $\int \sin^3(x)\cos(x)dx;$
- $\int_2^3 \frac{dx}{x\ln(x)}$.

Integration rationaler Funktionen

Oft entstehen durch Anwendung der Substitutionsregel oder der partiellen Integration rationale Funktionen, also Funktionen der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei p und q Polynome sind. Falls $\mathrm{grad}(p) \geq \mathrm{grad}(q)$ erhält man mittels Polynomdivision eine Zerlegung

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{t(x)}{q(x)},$$

mit Polynomen s und t, wobei $\mathrm{grad}(t) < \mathrm{grad}(q)$.
Somit gilt

$$\int f(x)dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int s(x)dx + \int \frac{t(x)}{q(x)}dx.$$

Die Integration von s ist einfach, daher konzentrieren wir uns auf den "echt" gebrochen rationalen Anteil $\frac{t}{q}$

Integration rationaler Funktionen

Oft entstehen durch Anwendung der Substitutionsregel oder der partiellen Integration rationale Funktionen, also Funktionen der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei p und q Polynome sind. Falls $\mathrm{grad}(p) \geq \mathrm{grad}(q)$ erhält man mittels Polynomdivision eine Zerlegung

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{t(x)}{q(x)},$$

mit Polynomen s und t, wobei $\mathrm{grad}(t) < \mathrm{grad}(q)$.
Somit gilt

$$\int f(x)dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int s(x)dx + \int \frac{t(x)}{q(x)}dx.$$

Die Integration von s ist einfach, daher konzentrieren wir uns auf den "echt" gebrochen rationalen Anteil $\frac{t}{q}$ $\Longrightarrow$ wir benötigen Partialbruchzerlegung.

Partialbruchzerlegung $g(x) = \frac{t(x)}{q(x)}$

1. Wir stellen das Nennerpolynom als Produkt von Linearfaktoren der Form $(x-a)$ und irreduziblen quadratischen Faktoren der Form ax^2+bx+c dar, wobei $D = b^2-4ac < 0$ ist.
2. Tritt $(x-a)^p$ in der Faktorisierung von q auf, so erhalten wir als additiven Beitrag zur Partialbruchzerlegung von $\frac{t(x)}{q(x)}$ eine Summe der Form
$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_p}{(x-a)^p}$$
mit den Konstanten $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Jeder andere Faktor trägt eine entsprechende Summe bei. Die Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots$ werden in Schritt 4 bestimmt.
3. Tritt der irreduzible Faktor $(ax^2+bx+c)^l$ in q auf, so addieren wir eine Summe von Termen der Form
$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c} + \ldots + \frac{B_lx+C_l}{(ax^2+bx+c)^l},$$
mit den Konstanten $B_1,\ B_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots$ zur Partialbruchzerlegung. Dies ist für jeden der verschidenen irreduziblen Faktoren durchzuführen.
4. Die in den Schritte 2 und 3 bestimmte Summe aus Partialbrüchen setzen wir mit $\frac{t(x)}{q(x)}$ gleich. Wir multiplizieren die resultierende Gleichung mit $q(x)$ und bestimmen die Konstanten $A_1,\ A_2, \ldots,\ B_1,\ B_2, \ldots,\ C_1,\ C_2, \ldots$ durch Koeffizientenvergleich entsprechender Potenzen x^k auf beiden Seiten der Gleichung oder durch Einsetzen geeigneter Werte von x.

Die meisten dieser Terme sind sehr einfach zu integrieren. Die Funktionen $f(x)$ aus den Schritten 2 und 3 besitzen folgende Stammfunktionen $F(x) = \int f(x)dx$:

$f(x)$	x^k	$\frac{1}{(x-a)^k},\ (k>1)$	$\frac{1}{x-a}$	$\frac{2x+b}{x^2+bx+c}$	$\frac{1}{x^2+bx+c}$
$F(x)$	$\frac{x^{k+1}}{k+1}$	$-\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}$	$\ln(\lvert x-a\rvert)$	$\ln(x^2+bx+c)$	$\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right)$

Integration rationaler Funktionen

Wir fassen die Schritte zur Integration einer rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ noch einmal zusammen:

- Spalte mittels Polynomdivision den echt gebrochen rationalen Anteil ab:

$$f(x) = s(x) + \frac{t(x)}{q(x)} \text{ mit } \operatorname{grad}(t) < \operatorname{grad}(q).$$

- Berechne für $g(x) = \frac{t(x)}{q(x)}$ eine Partialbruchzerlegung und integriere die entsprechenden Summanden mit Hilfe der Formeln und Tabellen. Das verbleibende Integral über $s(x)$ ist einfach.

Man bestimme auf diese Weise $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$ und $\int \frac{x^2+x}{x^2+2} dx$.

Das uneigentliche Integral

Bisher haben wir die Integration einer Funktion unter den Voraussetzungen, dass

- die Funktion beschränkt ist;
- das Integrationsintervall auch beschränkt ist,

durchgeführt.

Man spricht von einem uneigentlichen Integral, wenn einer der folgenden Sachverhalte erfüllt ist:

- Eine oder beide Integrationsgrenzen liegen nicht im Endlichen;
- Der Integrand ist im Integrationsintervall nicht beschränkt.

Definition 4.1 (Das uneigentliche Integral)

Sei $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *und* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *auf jedem Intervall* $[a, r]$ *mit* $a < r < b$, *Riemann-integrierbar. Falls*

$$\lim_{r \to b-} \int_a^r f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$$

existiert, so heißt f *auf* $[a, b)$ *uneigentlich Riemann-integrierbar. Man sagt auch,*

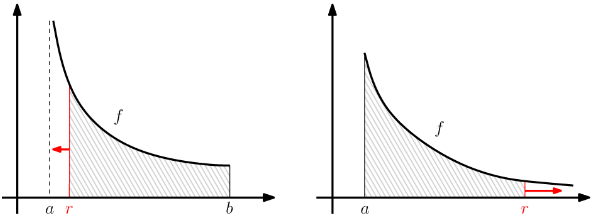
$$\int_a^b f(x)dx$$

ist konvergent.

Analog für $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ *oder* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *mit* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Von besonderem Interesse sind häufig folgende Fälle:

- der Integrand ist bei Annäherung an eine der Integrationsgrenzen unbeschränkt (links);
- das Integrationsintervall ist unbeschränkt (rechts).



Sind beide Grenzen unendlich, wird also über ganz $\mathbb{R}$ integriert, so teilen wir $\mathbb{R}$ einfach in zwei Integrationsbereiche und verwenden die obigen Definitionen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx + \lim_{c\to\infty} \int_{b}^{c} f(x)dx.$$

Bestimmen Sie $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$, $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3-1}dx$.

Numerische Integration

Nur die wenigsten Integrale kann man geschlossen auswerten; in den allermeisten Fällen ist man auf numerische Näherungsverfahren zur Berechnung der Integrale, sogenannte Quadraturverfahren, angewiesen.

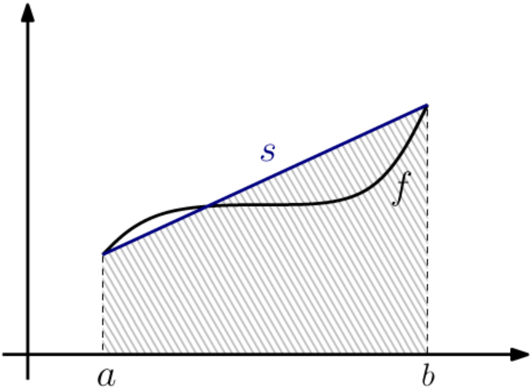
Prominente Integrale, die sich nachweislich nicht durch elementare Stammfunktionen bestimmen lassen, sind zum Beispiel die **Fehlerfunktion**

$$erf(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \; x \in \mathbb{R}.$$

Ein Weg zur näherungsweisen Bestimmung einer solchen Stammfunktion besteht darin, den Integrand f durch eine geschlossen integrierbare Ersatzfunktion $\bar{f}$ zu approximieren.

Auf die Integration einer interpolierenden Ersatzfunktion sind wir auch dann angewiesen, wenn wir den Integrand nur an einigen Stellen kennen, etwa im Fall von Meßergebnissen.

Als Vorbetrachtung ersetzen wir eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ näherungsweise durch ihre Sekante s durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.



Damit erhalten wir die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)). \tag{5}$$

Schon anschaulich wird klar, dass diese Formel im Allgemeinen nur sehr grobe Näherungen liefern kann.

Wesentlich bessere Ergebnisse erhält man aber, wenn man $[a, b]$ in n gleichlange Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ unterteilt mit

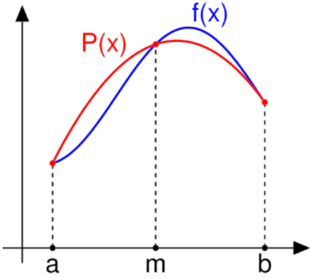
$$x_i = a + ih, \ i = 0, 1, \ldots, n, \ \text{mit } h = \frac{b-a}{n}$$

und die einfache Trapezregel (5) über jedem Teilintervall anwendet:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} h(f(x_i) + f(x_{i+1})) \qquad (6) \\ &= h\left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n)\right). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen den Ausdruck auf der rechten Seite als Trapezsumme $T_f(h)$ und die Formel (6) als zusammengesetzte Trapezregel.

Alternativ kann man f lokal auch durch quadratische Polynome ersetzen, und dadurch eine noch bessere Approximation erreichen:



Dieser Ansatz führt letztlich auf die zusammengesetzte Simpson-Regel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\ldots+4f(x_{n-1})+f(x_n)).$$

Dabei ist n gerade zu wählen. Den Term auf der rechten Seite bezeichnen wir mit $S_f(h)$.

Quadraturformeln sind nur sinnvoll anwendbar, wenn man den Fehler der Näherung abschätzen kann. Dabei hilft uns:

Satz 5.1 (Quadraturfehler Trapez- und Simpson-Regel)

Ist f auf $[a,b]$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_f(h)\right| \leq \frac{b-a}{12}h^2 \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)|.$$

Ist f auf $[a,b]$ viermal stetig differenzierbar, dann gilt

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_f(h)\right| \leq \frac{b-a}{180}h^4 \max_{a\leq x\leq b} |f^{(4)}(x)|.$$

Berechnen Sie $\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx$ näherungsweise mit den Zwischensummen, mit der Trapezregel bzw. mit der Simpson-Regel. Berechnen Sie den relativen Fehler.

Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen / Tutorien)

- den Begriff der Riemann-Integrierbarkeit tiefgreifend verstanden haben;
- den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beherrschen und Integrale mit Hilfe der Stammfunktion berechnen können;
- die Stammfunktionen zu den gängigen elementaren Funktionen kennen;
- einige Integrationstechniken sicher anwenden können;
- über Quadraturformeln grob bescheidwissen.