

Analysis mehrerer Veränderlicher

Daniel Gerth

Überblick Funktionen mehrerer Veränderlicher

Dieses Kapitel erklärt:

- Wie Funktionen mehrerer Veränderlicher definiert werden;
- Welche Gestalt der Definitionsbereich von Funktionen mehrerer Veränderlicher besitzen kann;
- Wie Funktionen zweier Variablen graphisch dargestellt werden können;
- Elementare Eigenschaften von Funktionen mehrerer Veränderlicher;
- Wie das Differenzieren von Funktionen mehrerer Variablen zu "partiellen Ableitungen" führt;
- Den wichtigen Zusammenhang zwischen gemischten partiellen Ableitungen;
- Den Zusammenhang zwischen partieller Differenzierbarkeit, (totaler) Differenzierbarkeit und der geometrischen Interpretation mit Hilfe von Tangentialebenen;
- Wie man eine Funktion mehrerer Variablen auf lokale Minima und Maxima untersucht,
- Wie man mehrdimensionale Integrale berechnet;
- Was sich hinter dem Begriff des Kurveintegrals verbirgt.

Inhaltsverzeichnis

- 1 Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher und elementare Eigenschaften
 - Beschränktheit, Stetigkeit
- 2 Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen
 - Partielle Ableitungen
- 3 Differenzierbarkeit, Gradient und totales Differential
 - Tangentialebene und Differenzierbarkeit
- 4 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen
- 5 Totales Differential
 - Differentialoperatoren
 - Implizite Funktionen
- 6 Mehrfachintegrale
 - Bereichsintegrale
- 7 Kurvenintegrale
- 8 Ziele erreicht?

Einleitung. Motivation

”Nicht immer hängen naturwissenschaftliche Größen nur von **einer** reellen Variablen ab. In manchen Fällen sind es mehrere Faktoren, die den Wert einer gegebenen Größe beeinflussen.

Funktionen einer Veränderlichen geben die in Physik und Chemie auftretenden funktionalen Zusammenhänge in vielen Fällen nur mit Einschränkungen wieder. In der Regel finden wir, dass eine Größe von mehreren ”unabhängigen” Variablen abhängt”.

- Die Zustandsgleichung für ein Mol eines idealen Gases lautet $PV = RT$. Der Druck P hängt also vom Volumen V und der Temperatur T ab, R ist die Gaskonstante.

$$P = f(V, T) := \frac{RT}{V}.$$

- Häufig ist eine Größe zu beschreiben, die sich im Raum ändert, die also von den kartesischen Koordinaten bzw. dem Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, z)$ eines Punktes abhängt:

$$g : (x, y, z) \rightarrow u := g(x, y, z).$$

Notationsfragen

Wir notieren eine von n reellen Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ abhängige Funktion f in der Form

$$\vec{f}: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x_1, \dots, x_n).$$

Im Fall $n = 2$ oder $n = 3$, falls also der Definitionsbereich D eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ ist, werden die unabhängigen Variablen statt mit $x_1, x_2, (x_3)$ oftmals auch mit $x, y, (z)$ bezeichnet.

Wenn es sich bei Argumenten oder Werten um reelle Zahlen handelt ($n = 1$ oder $m = 1$), lässt man den betreffenden Vektorpfeil weg. **Wir beschränken uns meist auf den Fall $m = 1$.**

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \ln(-x) + x\sqrt{y-2}.$

Der Definitionsbereich:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y \geq 2\}.$$

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \sqrt{\sin(x) - \cos(y)}.$

Der Definitionsbereich?

- $\vec{g}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{g}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ x + e^y \end{bmatrix}.$

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(V, T) = P = \frac{RT}{V}.$ Der Definitionsbereich?

Visualisierung

Der **Graph** $G(f)$ einer Funktion $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ von n Variablen ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$G(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y = f(\vec{x})\}.$$

Nur im Fall $n = 2$ können wir den Graph $G(f)$ anschaulich darstellen, und zwar als Fläche im Raum $\mathbb{R}^3$:

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \text{ und } z = f(x, y)\}.$$

Der Funktionswert $z = f(x, y)$ ist die Höhe eines Flächenpunktes über der (x, y) -Ebene.

Beispiel

Gegeben sei für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Funktion

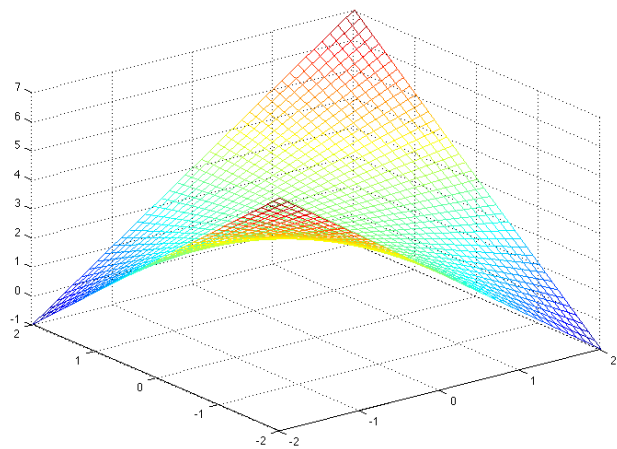
$$f(x, y) = xy + 3.$$

Wir wollen die Funktion auf dem quadratischen Ausschnitt

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$$

graphisch darstellen und berechnen dazu die Funktionswerte für die in der unten stehenden Tabelle ausgewählten Punktepaae (x, y) .

$x \backslash y$	-2	-1	0	1	2
-2	7	5	3	1	-1
-1	5	4	3	2	1
0	3	3	3	3	3
1	1	2	3	4	5
2	-1	1	3	5	7

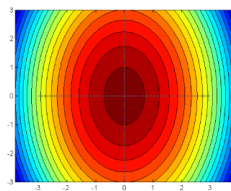
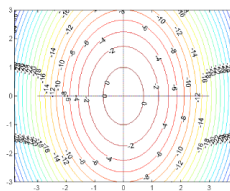
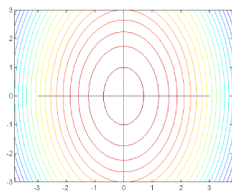


Visualisierung

Eine weitere Möglichkeit ist die Darstellung von **Höhenlinien** in der Ebene (Karte, Konturplot). Diese Höhenlinien erhält man durch geometrische Interpretation der Gleichung

$$f(x, y) = c$$

für verschiedene "Höhenniveaus" $c \in \mathbb{R}$.



Konturplots findet man häufig zur Geländebeschreibung auf Landkarten oder auf Wetter- und Klimakarten:

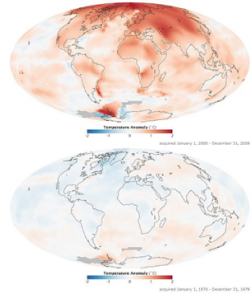
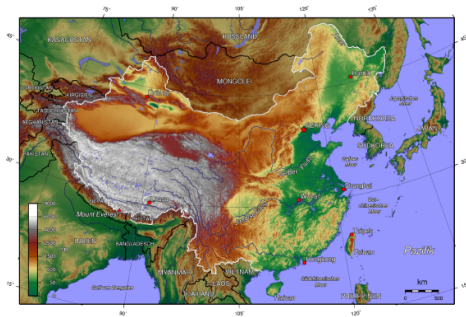


Bild links: farbige Geländedarstellung auf einer topografischen Karte von China (Captain Blood, Wikimedia Commons).

Bild rechts: Temperaturanomalien 1970-79 und 2000-09 im Vergleich zum Mittel von 1951-80 (NASA)

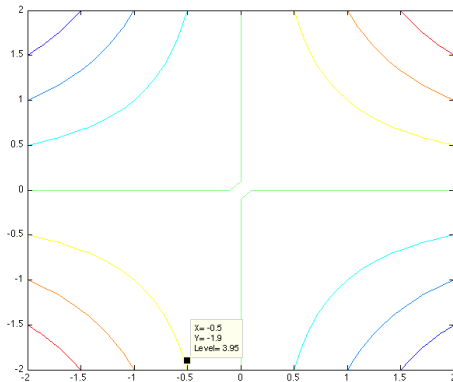
Beispiel

Betrachten wir nochmals die Funktion

$$f(x, y) = xy + 3.$$

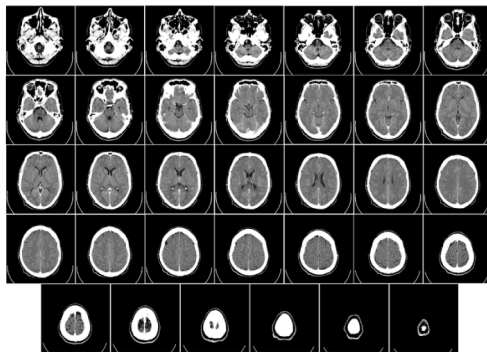
Wir zeigen eine graphische Veranschaulichung die Funktion durch Höhenlinien. Eingezeichnet sind die Höhenlinien für

$$c = 0, 1, 2, \dots$$



Visualisierung

Im Fall $n = 3$ oder $n > 3$ ist die Darstellung schwieriger. Zum Beispiel kann man Schnittbilder zu erstellen. Dies geschieht häufig bei tomografischen Verfahren (CT, MRT, PET).



CT eines menschlichen Schädels. Dargestellt sind die ortsabhängigen Schwächungskoeffizienten für Röntgenstrahlung in verschiedenen transversalen Ebenen.

Elementare Eigenschaften: Beschränktheit, Stetigkeit

Wie schon Funktionen einer Variablen lassen sich auch Funktionen mehrerer Veränderlicher durch ihre elementare Eigenschaften grundlegend charakterisieren. Einige dieser Merkmale lassen sich analog zum eindimensionalen Fall formulieren, andere müssen verallgemeinert werden. Wieder andere besitzen kein mehrdimensionales Pendant.

Definition 1.1 (Beschränktheit)

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ gilt

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq M.$$

Sie heißt **nach unten beschränkt**, wenn es ein $m \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ gilt

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq m.$$

Sie heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beschränktheit

Auf analoge Weise lassen sich auch die Begriffe "**kleinste obere Schranke**" und "**größte untere Schranke**" erklären.

Untersuchen Sie die für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ definierte Funktion

$$f(x, y, z) = \cos(xy + z) - \left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right|$$

auf ihre Beschränktheit.

Stetigkeit

Um den Begriff der **Stetigkeit** präzise erklären zu können, bedarf es wieder des Begriffs einer **Vektorfolge**, deren Glieder Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ sind.

Notation:

- Für das m -te Folgenglied:

$$\vec{x}^{(m)} = \begin{bmatrix} x_1^{(m)} \\ \vdots \\ x_n^{(m)} \end{bmatrix}$$

(der Folgenindex steht in Klammern oben, um Verwechslungen mit dem Komponentenindex und mit Exponenten bei Potenzen vorzubeugen),

- für die Folge als Ganzes: $(\vec{x}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$, $(\vec{x}^{(m)})_m$ oder einfach $(\vec{x}^{(m)})$.

Die *reellen Zahlenfolgen* $(x_j^{(m)})_m$ (für $j \in \{1, \dots, n\}$ jeweils fest) heißen **Komponentenfolgen** von $(\vec{x}^{(m)})_m$.

Definition 1.2 (Konvergenz von Vektorfolgen)

Ein Vektor $\vec{x}$ heißt **Grenzwert** der Vektorfolge $(\vec{x}^{(m)})_m$, wenn

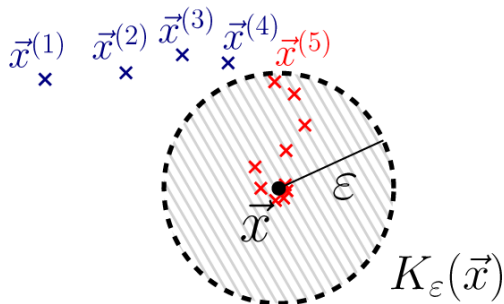
$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} : \|\vec{x}^{(m)} - \vec{x}\| < \varepsilon, \forall m \geq m_0.$$

Besitzt die Vektorfolge $(\vec{x}^{(m)})$ einen Grenzwert, so heißt sie **konvergent**, anderenfalls **divergent**.

Schreibweisen:

- $\vec{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}^{(m)}$;
- $\vec{x}^{(m)} \rightarrow \vec{x}$ für $m \rightarrow \infty$, oder kürzer $\vec{x}^{(m)} \rightarrow \vec{x}$.

Geometrische Interpretation



Für große m liegen die Folgenglieder beliebig nahe am Grenzwert, d. h. in einer beliebig kleinen Kugel $K_\varepsilon(x)$ (ε -Umgebung von $\vec{x}$).

Im hier visualisierten Fall liegen für $m \geq m_0 = 5$ alle Folgenglieder in der gewählten ε -Umgebung.

Satz 1.3

Sei $(\vec{x}^{(m)}) \subset \mathbb{R}^n$ eine Vektorfolge und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}^{(m)} = \vec{x}$$

genau dann, wenn

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j \text{ für alle } 1 \leq j \leq n.$$

Die Konvergenz einer Vektorfolge ist also äquivalent zur Konvergenz sämtlicher Komponentenfolgen $(x_j^m)_m$.

Bei diesen handelt es sich um reelle Zahlenfolgen, für die Sie die bekannten Gesetzmäßigkeiten verwenden können.

Konvergieren die Vektorfolgen

$$\vec{x}^{(m)} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{m} \\ \cos(e^{1/m^2}) \end{bmatrix}, \quad \vec{y}^{(m)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m^2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{z}^{(m)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ m \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Intuitiv wollen wir mit diesem Begriff wieder folgende Eigenschaften einer Funktion erfassen:

- (Hinreichend) kleine Änderungen an den Argumenten führen zu (beliebig) kleinen Änderungen der Funktionswerte.
- Durch hinreichend feines "Justieren" der Eingabewerte lassen sich die Ausgabewerte einer Funktion hinreichend fein "einstellen".

Der Zugang zur Stetigkeit erfolgt wie im Eindimensionalen über Grenzwerte von Funktionen. Erforderlich ist also die Verallgemeinerung des Grenzwertbegriffs auf Funktionen mehrerer Variablen.

Grenzwert einer Funktion

Definition 1.4

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Man sagt, f **konvergiert** für $\vec{x}$ gegen $\vec{x}_0$ gegen a , wenn für alle Folgen $(\vec{x}^{(m)}) \subset D$ mit

$$\vec{x}^{(m)} \rightarrow \vec{x}_0, \vec{x}^{(m)} \neq \vec{x}_0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (1)$$

die Beziehung $f(\vec{x}^{(m)}) \rightarrow a$ gilt. Man nennt a den **Grenzwert** von f für $\vec{x}$ gegen $\vec{x}_0$.

Schreibweise:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = a \quad \text{oder} \quad f(\vec{x}) \rightarrow a \text{ für } \vec{x} \rightarrow \vec{x}_0.$$

Grenzwert einer Funktion

Definition 1.4

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Man sagt, f **konvergiert** für $\vec{x}$ gegen $\vec{x}_0$ gegen a , wenn für alle Folgen $(\vec{x}^{(m)}) \subset D$ mit

$$\vec{x}^{(m)} \rightarrow \vec{x}_0, \vec{x}^{(m)} \neq \vec{x}_0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (1)$$

die Beziehung $f(\vec{x}^{(m)}) \rightarrow a$ gilt. Man nennt a den **Grenzwert** von f für $\vec{x}$ gegen $\vec{x}_0$.

Schreibweise:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = a \quad \text{oder} \quad f(\vec{x}) \rightarrow a \text{ für } \vec{x} \rightarrow \vec{x}_0.$$

Alternative Definition:

Eine Zahl a heißt Grenzwert der Funktion f , wenn für jede Folge $\vec{x}^{(m)} \rightarrow \vec{x}$ gilt

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ so dass } |f(\vec{x}^{(m)}) - a| \leq \epsilon \text{ sobald } \|\vec{x}^{(m)} - \vec{x}\| \leq \delta$$

Stetigkeit

Definition 1.5

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **stetig** im Punkt $\vec{x}_0 = \{x_1, \dots, x_n\} \in D$, wenn der Grenzwert $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$ existiert, und

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$$

gilt.

f heißt **stetig auf der Menge** $M \subset D$, wenn f in jedem Punkt $\vec{x}_0 \in M$ stetig ist.

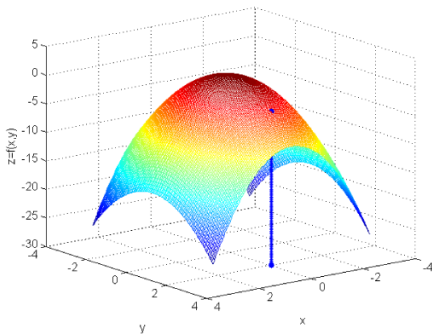
Der Grenzwert muss für alle Folgen $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$ existieren!

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 1 - 2x^2 - y^2;$
- $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = \begin{cases} 1 - 2x^2 - y^2, & \text{für } (x, y) \neq (0, 2); \\ -42, & \text{für } (x, y) = (0, 2). \end{cases}$

auf Stetigkeit im Punkt $(0, 2)$.

Wir versuchen, die Situation graphisch umzusetzen, und zeichnen den Graphen von $z = f(x, y)$ als Fläche über der $x - y$ -Ebene.



Wenn man sich nahe des Punktes $(0, 2)$ oben auf der Fläche befindet, dann wird man sich in etwa auf Höhe -3 befinden.

Wenn man dagegen an besagter Stelle ein (unendlich dünnes) Loch bis zur Tiefe -42 bohrt, kann man zwar beliebig dicht auf altem Höhenniveau herantreten, fällt allerdings bei exaktem Erreichen des Punktes $(0, 2)$ in das Loch hinein.

Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

Im Fall von differenzierbaren Funktionen einer Veränderlichen hatten wir die Ableitung von $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle x_0 des Definitionsbereichs durch den Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ausgedrückt.

Dieses Konzept stellt uns im Fall mehrerer Variablen vor ein Kernproblem.

Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

Im Fall von differenzierbaren Funktionen einer Veränderlichen hatten wir die Ableitung von $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle x_0 des Definitionsbereichs durch den Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ausgedrückt.

Dieses Konzept stellt uns im Fall mehrerer Variablen vor ein Kernproblem.

Verallgemeinerungspotential hat dagegen die äquivalente Charakterisierung aus Satz 1.3 (Differentialrechnung):

f ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es eine Zahl a (das ist genau die Ableitung $f'(x_0)$) und eine Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

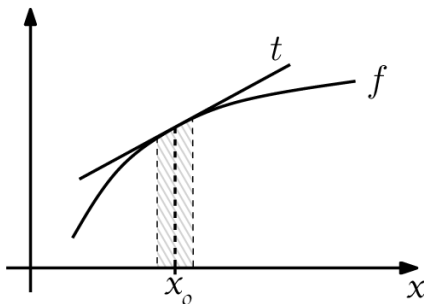
$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + \varphi(x) \tag{2}$$

mit $\frac{\varphi(x)}{|x - x_0|}$ für $x \rightarrow x_0$.

Das Kriterium (2) sagt grob gesprochen, dass $f(x)$ im Falle der Differenzierbarkeit nahe x_0 gut durch eine Tangente $t(x)$ approximiert wird:

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{=:t(x)} \text{ für } x \approx x_0.$$

Graphisch:



Partielle Ableitungen

In diesem Abschnitt betrachten wir stets reellwertige Funktionen mehrerer Variablen, genauer Funktionen

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

mit offenem Definitionsbereich D .

In einem ersten Ansatz wollen wir lediglich eine Komponente x_j im Argument von f variieren, während wir die anderen Komponenten festhalten (d. h. als Parameter behandeln).

Dieser Ansatz führt uns direkt zum Begriff der partiellen Ableitung. Wir benötigen dafür lediglich den eindimensionalen Ableitungsbegriff.

Definition 2.1

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in $\vec{z} \in D$ **partiell nach x_j differenzierbar**, wenn die j -te partielle Funktion

$$f_j : \mathbf{x} \mapsto f(z_1, \dots, z_{j-1}, \mathbf{x}, z_{j+1}, \dots, z_n)$$

in x_j differenzierbar ist. Die Zahl

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{z})$$

heißt die **j -te partielle Ableitung** von f an der Stelle $\vec{z}$.

Eine Funktion f heißt an der Stelle $\vec{z}$ **partiell differenzierbar**, wenn sie in $\vec{z}$ nach allen Variablen $x_1, \dots, x_n$ partiell differenzierbar ist.

Schreibweisen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{z}), f_{x_j}(\vec{z}), \partial_j f(\vec{z}) \text{ oder } \partial_{x_j} f(\vec{z}).$$

Alle partiellen Ableitungen, in einen Vektor gesammelt, bilden den **Gradient**:

$$\nabla f(\vec{z}) = \text{grad } f(\vec{z}) := \left(\frac{\partial f(\vec{z})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{z})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\vec{z})}{\partial x_n} \right)^T$$

Natürlich kann man auch die zugrundeliegenden Differentialquotienten notieren:

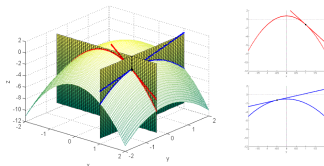
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{z}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_1, \dots, z_{j-1}, \mathbf{z_j} + \mathbf{h}, z_{j+1}, \dots, z_n) - f(z_1, \dots, z_{j-1}, \mathbf{z_j}, z_{j+1}, \dots, z_n)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{z} + h\vec{e}_j) - f(\vec{z})}{h}.\end{aligned}$$

Aufgrund letzterer Darstellung spricht man auch von der Ableitung in Richtung des j -ten Einheitsvektors.

Beispiel

Graphen der Funktion $f(x, y) = 1 - 2x^2 - y^2$ sowie der partiellen Funktionen $f_1(x)$ (rot) und $f_2(y)$ zum Punkt $(1, -0.5)$.

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -0.5)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -0.5)$ entsprechen den Anstiegen der eingezeichneten Tangenten.



Berechnung der partiellen Ableitungen

Zur Berechnung der partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ leitet man f nach x_j ab und behandelt alle anderen Variablen als Konstanten. Dabei gelten die gewohnten Ableitungsregeln.

Beispiel

Die partiellen Ableitungen zu $f(x, y) = 1 - 2x^2 - y^2$ lauten

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -4x \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y.$$

Die Anstiege der visualisierten Tangenten an die partiellen Funktionen sind also

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -0.5) = -4 \text{ (rot)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -0.5) = 1 \text{ (blau)}.$$

Man berechne sämtliche partiellen Ableitungen von

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + 2y,$
- $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y)}{x^2 + y^2}.$

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Die partiellen Ableitungen einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind wiederum Funktionen vom Typ $\frac{\partial f}{\partial x_j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Man kann sie also ggf. erneut partiell ableiten – möglicherweise nach jeder der Variablen x_k ($k = 1, \dots, n$).

Die dabei entstehenden partiellen Ableitungen höherer Ordnung bezeichnet man mit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_j^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_k^2 \partial x_j}, \dots, \text{ oder } f_{x_j x_j}, f_{x_j x_k}, \dots$$

Die Differentiationsreihenfolge liest man im "Nenner" von rechts nach links. Sie spielt jedoch in den meisten praktischen Fällen keine Rolle.

Definition 2.2 (Stetige partielle Differenzierbarkeit)

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in $\vec{z} \in D$ (k -mal) **stetig partiell differenzierbar**, wenn alle partiellen Ableitungen (bis zur k -ten Ordnung) an der Stelle $\vec{z}$ existieren und dort stetig sind.

f heißt auf einer offenen Menge $M \subset D$ stetig differenzierbar, wenn f an jeder Stelle $\vec{z} \in M$ stetig partiell differenzierbar ist.

Schreibweise: $f \in C^k(M)$.

Berechnen Sie zu

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 1 - 2x^2 - y^2,$
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^4 + \sin(xy) + xe^{z^2}$

sämtliche partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung. Was können Sie beobachten?

Satz 2.3 (Satz von Schwarz)

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit D offen zweimal stetig partiell differenzierbar ($f \in C^2(D)$).

Dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{z}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{z})$$

für alle $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ und alle $\vec{z} \in D$.

Bei zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktionen spielt also die Differentiationsreihenfolge beim zweimaligen partiellen Differenzieren keine Rolle.

Das Ergebnis überträgt sich mühelos auf k -mal stetig partiell differenzierbare Funktionen und partielle Ableitungen bis zur Ordnung k .

Differenzierbarkeit, Gradient, und totales Differential

Wie im vorherigen Abschnitt behandeln wir wieder reellwertige Funktionen

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

mit offenem Definitionsbereich D .

Ziel ist die Verallgemeinerung des eindimensionalen Ableitungsbegriffs auf diese Funktionen. Dabei wollen wir uns an die Approximierbarkeit von f durch lineare Funktionen erhalten.

Definition 3.1 (Gradient)

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in $\vec{z}$ partiell differenzierbar, dann heißt

$$\nabla f(\vec{z}) := \left(\frac{\partial f(\vec{z})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{z})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\vec{z})}{\partial x_n} \right)^T$$

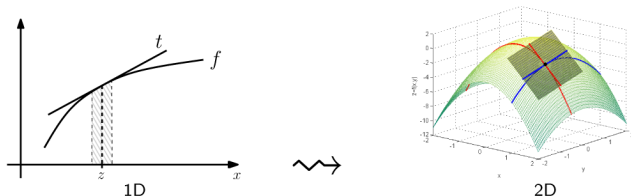
der **Gradient** von f an der Stelle $\vec{z}$.

Alternative Schreibweise: $\text{grad } f(\vec{z})$.

Die Tangentialebene

Für eine differenzierbare Funktion **einer** unabhängigen Variablen z ist es die **Tangente** an die Kurve, welche die Funktion $f(z)$ lokal um eine Stelle z approximiert. Die Näherung beruht in diesem Fall darauf, dass Funktionswert und (erste) Ableitung an dieser Stelle übereinstimmen.

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mehrerer Veränderlicher ist ein mehrdimensionales Pendant gegeben durch die so genannte **Tangentialebene** an die Funktion zur Stelle $\vec{z}$. Auch sie soll die Eigenschaft besitzen, an der Stelle $\vec{z}$ in **Funktionswert** und **Gradient** mit der gegebenen Funktion übereinzustimmen. Ist f eine Funktion von mehr als 2 Variablen spricht man von einer **Tangentialhyperebene**.



Definition 3.2 (Differenzierbarkeit)

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in $\vec{z} \in D$ (total) **differenzierbar**, wenn es einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ sowie eine Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(\vec{x}) = f(\vec{z}) + \vec{a}^T (\vec{x} - \vec{z}) + \varphi(\vec{x}),$$

mit $\frac{\varphi(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{z}\|} \rightarrow 0$ für $\vec{x} \rightarrow \vec{z}$.

$f'(\vec{z}) := \vec{a}$ heißt dann die (totale) **Ableitung** von f an der Stelle $\vec{z}$.

Zur konkreten Berechnung der Ableitung verwendet man allerdings nicht Definition 3.2, sondern folgenden Satz:

Satz 3.3

Ist $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in $\vec{z} \in D$ differenzierbar, so ist f in $\vec{z}$ auch partiell differenzierbar, und es gilt

$$f'(\vec{z}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{z}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{z}) \right]^T = \nabla f(\vec{z}). \quad (3)$$

Begründung von (3): Die Tangenten der partiellen Funktionen müssen in der Tangentialebene liegen.

Differenzierbarkeit

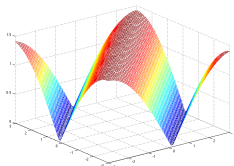
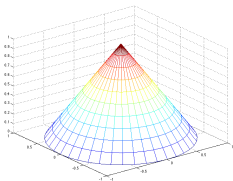
Woher wissen wir aber, dass f total differenzierbar ist? Partielle Differenzierbarkeit allein reicht dafür nicht! Es reicht aber, nur ein wenig mehr zu fordern:

Satz 3.4

*Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist total differenzierbar in einer Stelle $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n) \in D$, wenn ihre partiellen Ableitungen in $\vec{z}$ **existieren** und diese dort auch **stetig** sind.*

Insbesondere ist f auf ganz D differenzierbar, wenn f auf ganz D stetig partiell differenzierbar ist.

**Funktionen mit Nichtdifferenzierbarkeitspunkt (links) und
Nichtdifferenzierbarkeitskanten (rechts)**



Definition 3.5 (Tangential(hyper)ebene)

Ist eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n) \in D$ partiell differenzierbar, so heißt die Funktion

$$\begin{aligned} t_{\vec{z}}(\vec{x}) &= f(\vec{z}) + \frac{\partial f(\vec{z})}{\partial x_1}(z_1 - x_1) + \dots + \frac{\partial f(\vec{z})}{\partial x_n}(z_n - x_n) \\ &= f(\vec{z}) + \nabla f(\vec{z})^T (\vec{z} - \vec{x}) \end{aligned}$$

die **Tangential(hyper)ebene** an die Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zur Stelle $\vec{z}$.

Berechnen Sie die Tangentialebene an die Funktion

$$f(x, y) = xy^2 + x^3y - x^2y^2$$

an der Stelle $(z_1, z_2) = (1, 1)$.

Beispiel

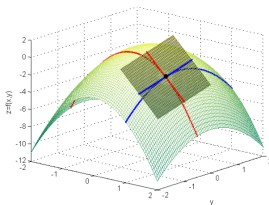
Die Funktion $f(x, y) = 1 - 2x^2 - y^2$ ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar mit $f_x(x, y) = -4x$ und $f_y(x, y) = -2y$.

Damit ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ auch (total) differenzierbar mit

$$f'(x, y) = \nabla f(x, y) = [-4x, -2y]^T.$$

Die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(1, -\frac{1}{2})$ lautet

$$\begin{aligned} t(x, y) &= f(1, -\frac{1}{2}) + \nabla f(1, -\frac{1}{2}) \begin{bmatrix} x - 1 \\ y + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= -1.25 + [-4, 1] \begin{bmatrix} x - 1 \\ y + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= -4x + y + 3.25. \end{aligned}$$



Extrema von Funktionen mehrerer Variablen

Wir werden in diesem Abschnitt nach Punkten $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ suchen, in denen eine reellwertige differenzierbare Funktion mehrerer Variablen ein lokales Extremum annimmt.

Wir erinnern uns an das Vorgehen im Eindimensionalen, d. h. für

$f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- Finde alle Punkte $z \in \mathbb{R}$, für die $f'(z) = 0$ gilt (**notwendige Bedingung**).
- Falls in einem solchen Punkt zusätzlich $f''(z) > 0$ bzw. $f''(z) < 0$ gilt, so handelt es sich um ein lokales Minimum bzw. Maximum (**hinreichende Bedingung**).

Wir versuchen, diese Strategie zu verallgemeinern.

Definition 4.1

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ein Punkt $\vec{z} \in D$ heißt

- **globales Minimum** von f , wenn $f(\vec{z}) \leq f(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in D$,
- **globales Maximum** von f , wenn $f(\vec{z}) \geq f(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in D$,
- **lokales Minimum** von f , wenn $f(\vec{z}) \leq f(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in D \cap K_\epsilon(\vec{z})$ mit einem $\epsilon > 0$,
- **lokales Maximum** von f , wenn $f(\vec{z}) \geq f(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in D \cap K_\epsilon(\vec{z})$ mit einem $\epsilon > 0$,

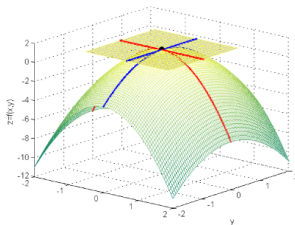
Mit $K_\epsilon(\vec{z})$ ist dabei wieder eine Kugel um $\vec{z}$ mit Radius ϵ gemeint.

Bei lokalen Extrema vergleicht man $f(\vec{z})$ also nur mit Funktionswerten zu Argumenten, die nahe an $\vec{z}$ liegen.

Satz 4.2 (Notwendiges Kriterium für ein Extremum)

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, und D offen. Besitzt f in $\vec{z} \in D$ ein lokales Minimum oder Maximum, so gilt

$$\nabla f(\vec{z}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\vec{z}) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\vec{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$



Gleichung (4) stellt eine notwendige Bedingung für lokale Extrema dar. Mit ihr kann man Kandidaten für Extrema finden; ein Nachweis der Extrema ist jedoch zusätzlich zu erbringen.

Untersuchen Sie das Polynom

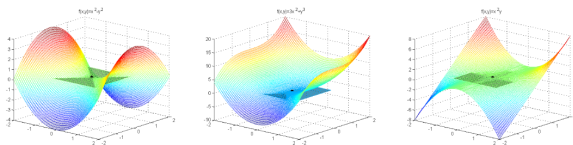
$$f(x, y) = 2x + 4xy^2$$

auf mögliche lokale Extrema.

Hesse-Matrix

Wie im Eindimensionalen reicht die notwendige Bedingung (4) für einen Nachweis von Extrema nicht aus.

Eine horizontale Tangentialebene ($\nabla f(\vec{z}) = \vec{0}$) könnte zum Beispiel folgendermaßen entstehen:



Wir wollen daher die bekannte reelle Bedingung $f''(\vec{z}) \neq 0$ verallgemeinern. Dazu formulieren wir zunächst ein Pendant zur zweiten Ableitung.

Definition 4.3

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in $\vec{z} \in D$ zweimal partiell differenzierbar. Dann heißt

$$H_f(\vec{z}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{z})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\vec{z})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{z})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\vec{z})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\vec{z})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{z})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\vec{z})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\vec{z})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{z})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Hesse-Matrix von f an der Stelle $\vec{z}$.

Aus dem Satz von Schwarz folgt sofort:

Satz 4.4

Ist $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in $\vec{z} \in D$ zweimal **stetig** differenzierbar, dann ist die Hesse-Matrix $H_f(\vec{z})$ symmetrisch.

Definitheit

Als nächstes benötigen wir eine mehrdimensionale Entsprechung zu den Relationen $>$ und $<$ in den eindimensionalen Beziehungen $f''(\vec{z}) < 0$ bzw. $f''(\vec{z}) > 0$.

Definition 4.5

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt

- *positive definit*, wenn ihre Eigenwerte sämtlich positiv sind,
- *negativ definit*, wenn ihre Eigenwerte sämtlich negativ sind,
- *indefinit*, wenn sie sowohl positiv als auch negativ Eigenwerte besitzt.

Schreiben Sie die Hesse-Matrix für die Funktion

$$f(x, y, z) = x^4 + \cos(xy) + xe^{z^2}$$

zur Stelle (x, y, z) .

Im symmetrischen 2×2 -Fall ist die Untersuchung auf Definitheit besonders leicht:

Satz 4.6

Eine symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

ist genau dann

- *positiv definit*, wenn $\det A > 0$ und $a_{1,1} > 0$,
- *negativ definit*, wenn $\det A > 0$ und $a_{1,1} < 0$,
- *indefinit*, wenn $\det A < 0$.

Analysieren Sie die Definitheitseigenschaften des Polynoms

$$p(x, y) = -4x^2 + 6xy - 4y^2$$

bzw. der zugehörigen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Satz 4.7 (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Seien $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $\vec{z} \in D$ ein stationärer Punkt von f (d.h. $\nabla f(\vec{z}) = \vec{0}$).

Dann gilt:

- Ist $H_f(\vec{z})$ positiv definit, dann besitzt f in $\vec{z}$ ein lokales Minimum.
- Ist $H_f(\vec{z})$ negativ definit, dann besitzt f in $\vec{z}$ ein lokales Maximum.
- Ist $H_f(\vec{z})$ indefinit, dann ist $\vec{z}$ keine Extremalstelle von f .

Stationäre Punkte, die keine Extrempunkte sind (betrifft dritten Punkt), werden auch **Sattelpunkte** genannt.

Rezept zur Bestimmung lokaler Extrema

Für zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit offenem Definitionsbereich D gehe wie folgt vor:

- Bestimme alle stationären Punkte von f , d.h. die Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\nabla f(\vec{z}) = \vec{0}.$$

- Berechne für alle diese stationären Punkte die Hesse-Matrix, und analysiere anhand der Eigenwerte oder mit dem obigen Satz deren Definitheitseigenschaften.
- Entscheide mit Satz 4.7, ob Extrema vorliegen und welcher Art diese gegebenenfalls sind.

Untersuchen Sie das Polynom

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy^2$$

auf lokale Extrema.

Beispiel

Es sei $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$. Wir berechnen

$$f_x(x, y) = 2x - 2y \quad \text{und} \quad f_y = -2x + 2y$$

und setzen also $2x - 2y = 0$ und $-2x + 2y = 0$. Dieses 2×2 -Gleichungssystem besitzt die unendlich vielen Lösungen

$$x = p, \quad y = p \quad (p \in \mathbb{R}),$$

was geometrisch der gesamten ersten Winkelhalbierenden $y = x$ entspricht. Mit den zweiten Ableitungen

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{yy}(x, y) = 2 \quad \text{und} \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -2$$

berechnen wir dann für diese kritischen Punkte (p, p) (eigentlich sogar für alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$)

$$f_{xx}(p, p) = 2, \quad \text{und} \quad f_{xx}(p, p) \cdot f_{yy}(p, p) - (f_{xy}(p, p))^2 = 2 \cdot 2 - (-2)^2 = 0.$$

Der Satz 4.7 liefert also für diese kritischen Punkte **keine** Aussage hinsichtlich ihrer Extremumseigenschaften!

Da wir die Funktion $f(x, y)$ jedoch auch in der Form $f(x, y) = (x - y)^2$ schreiben können, erkennen wir, dass $f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ausschließlich nichtnegative Werte annimmt. An den Stellen $x = y = p$ ($p \in \mathbb{R}$) ist $f(p, p) = 0$, so dass hier tatsächlich sogar globale - und damit auch lokale - Minima vorliegen.

Totales Differential

Wie im Eindimensionalen kann man zu einem gegebenen Vektor $d\vec{x}$ und einer differenzierbaren Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ das **totale Differential** an der Stelle $\vec{x} \in D$ definieren:

$$df(\vec{x}) := f'(\vec{x})d\vec{x} \quad (5)$$

Es beschreibt die Änderung des Funktionswerts der Tangential(hyper)ebene, wenn man von $\vec{x}$ zu $\vec{x} + d\vec{x}$ übergeht.

Für kleine $d\vec{x}$ unterscheiden sich Tangential(hyper)ebene und Funktion im Punkt $\vec{x} + d\vec{x}$ kaum. Für die Änderung der tatsächlichen Funktionswerte gilt also

$$\nabla f \approx df(\vec{x}) \text{ für } d\vec{x} \text{ klein.}$$

Definition 5.1

Das totale Differential einer differenzierbaren Funktion $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ zur Stelle $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)$

$$df(z_1, \dots, z_n) = f_{x_1}(z_1, \dots, z_n)dx_1 + \dots + f_{x_n}(z_1, \dots, z_n)dx_n.$$

Anwendung:

- Fehlerfortpflanzung $\Rightarrow$ Fehler- und Ausgleichsrechnung
- Richtungsableitung:

Definition 5.2

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar in $\vec{z} \in D$ und $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{r}\| = 1$. dann ist die Ableitung von f in Richtung $\vec{r}$ and der Stelle $\vec{z}$ gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\vec{z}) = \nabla f(\vec{z})^T \vec{r}$$

- mehrdimensionale Taylor-Formel
- Kettenregel im $\mathbb{R}^n$ und Koordinatentransformation

Satz von Taylor (vereinfacht)

Theorem 1

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D offen, f einmal stetig differenzierbar in D , $x, a \in D$.
Dann gilt

$$f(x) = f(a) + (x - a)^T \nabla f(a) + R_1.$$

Ist f zweimal stetig differenzierbar in D , so gilt

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a)^T (x - a) + \frac{1}{2} (x - a)^T H_f(a) (x - a) + R_2.$$

mit Hessematrix H_f und Restglied R_p so dass $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_p}{|h|} = 0$ (Abschätzungen für R_p sind in der Literatur verfügbar).

Beispiel

$f(x_1, x_2) = (x - 1)^4 (y - 2)^3$, $a = (0, 0)^T$, gesucht: $f(0.1, 0.1)$. Es ist
 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4(x - 1)^3 (y - 2)^3$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3(x - 1)^4 (y - 2)^2$, damit $\nabla f(0, 0) = (32, 12)^T$,
 $f(0, 0) = 8$ und

$$f(0.1, 0.1) \approx -8 + 0.01 \cdot 32 + 0.01 \cdot 12 = -7.56$$

Beispiel

Sei $f : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \exp(x_1 - x_2) \log(1 - x_2)$. Dann ist

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \exp(x_1 - x_2) \log(1 - x_2) \\ -\exp(x_1 - x_2) \left(\log(1 - x_2) + \frac{1}{1-x_2} \right) \end{pmatrix},$$

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \exp(x_1 - x_2) \log(1 - x_2) & -\exp(x_1 - x_2) \left(\log(1 - x_2) + \frac{1}{1-x_2} \right) \\ -\exp(x_1 - x_2) \left(\log(1 - x_2) + \frac{1}{1-x_2} \right) & \exp(x_1 - x_2) \left(\log(1 - x_2) + \frac{1}{1-x_2} - \frac{1}{(1-x_2)^2} \right) \end{pmatrix}.$$

Damit gilt um den Punkt $a = (1, 0)$:

$$f(x) \approx f(a) + (\nabla f(x_1, x_2))^T (x - a) + \frac{1}{2} (x - a)^T H_f(x, y) (x - a) = -x_1 x_2 e + \frac{1}{2} x_2^2 e$$

Wir wollen kurz weitere Differentialoperatoren kennen lernen. Betrachten wir zuerst skalare Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Wir kennen bereits den Gradient

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T.$$

Er kann interpretiert werden als Richtung des stärksten Abstiegs. Desweiteren existiert, falls alle zweiten partiellen Ableitungen existieren, der **Laplace-Operator**

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Beispiel

In der Diffusionsgleichung

$$\Delta c(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} c(t, x)$$

entspricht Δ der Änderung in der Teilchenstromdichte.

Weitere oft benutzte Differentialoperatoren gibt es für Vektorfelder $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Auch diese sollen kurz erwähnt werden.

Definition 5.3

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und alle partiellen Ableitungen jeder Komponentenfunktion $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, m$ existieren. Die **Jacobimatrix** im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Definition 5.4

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x)$, $i = 1, \dots, n$ existieren. Die **Divergenz** von f im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\operatorname{div} f(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x).$$

Die Divergenz beschreibt, ob sich ein Vektorfeld wie eine Quelle ($\operatorname{div} f(x) < 0$) oder eine Senke ($\operatorname{div} f(x) > 0$) verhält

Definition 5.5

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und alle benötigten partiellen Ableitungen existieren. Die **Rotation** (curl) ist definiert als

$$\operatorname{rot} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

Die Rotation gibt an, um welche Achse und wie schnell sich ein Körper im Punkt x dreht.

Beispiel

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 + x_3^3 \\ x_1 x_2^2 x_3 \\ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) x_1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_1^2 & 3x_3^2 \\ x_2^2x_3 & 2x_1x_2x_3 & x_1x_2^2 \\ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{div} f(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_2x_3 + 2x_1x_3,$$

$$\operatorname{rot} f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 - x_1x_2^2 \\ 2x_3^2 - 3x_1^2 - x_2^2 \\ x_2^2x_3 - x_1^2 \end{pmatrix}$$

Implizite Funktionen

Zwei reelle Variablen x und y seien durch eine Gleichung der Form

$$F(x, y) = 0 \tag{6}$$

verknüpft. Kann man diese Gleichung wenigstens in der Nähe eines Punktes (x_0, y_0) , der (6) selbst erfüllt, eindeutig nach y auflösen?

Gesucht ist also eine reelle Funktion f mit

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x) \quad \text{für } (x, y) \text{ nahe bei } (x_0, y_0).$$

Eine solche Funktion f nennt man **implizite Funktion**.

Manchmal ist man dabei noch nicht einmal an $f(x)$ selbst interessiert, sondern eher an der Ableitung $f'(x)$.

Beispiel

Die Gleichung

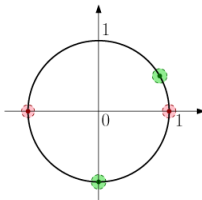
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

beschreibt einen Kreis um $(0,0)$ mit Radius 1.

Nahe dem Punkt $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ und $(0, -1)$ (grün) kann man (6) eindeutig nach y auflösen:

$$y = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ bzw. } y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

Nahe der Punkt $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ (rot) gelingt eine eindeutige Auflösung dagegen nicht, da man nicht weiß, für welchen Funktionswert man sich entscheiden soll.



Satz 5.6

Die Funktion $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf der offenen Menge D stetig partiell differenzierbar. Der Punkt $(x_0, y_0) \in D$ erfülle die Gleichung

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Dann gibt es offene Umgebungen $U, V \subset \mathbb{R}$ von x_0 und y_0 und eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ für $x \in U, y \in V$,
- f ist in x_0 stetig partiell differenzierbar mit

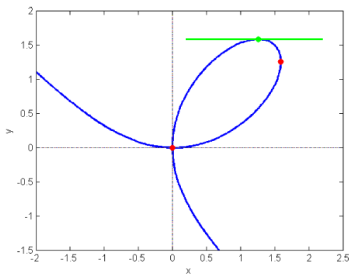
$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Betrachten Sie das kartesische Blatt, das durch die Gleichung

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

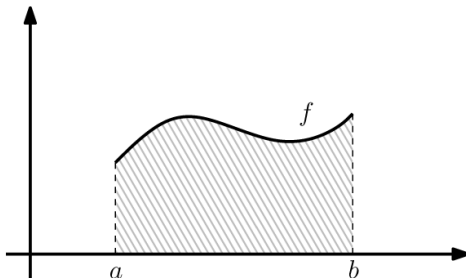
gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte des kartesischen Blatts, für die keine eindeutige lokale Auflösung nach y möglich ist.

Bestimmen Sie alle Punkte mit horizontaler Tangente sowie den Anstieg der Tangente im Punkt $(1, 2\cos(2/9\pi))$.



Mehrfachintegrale. Das Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$

Im Eindimensionalen hatten wir mit dem Integral $\int_a^b f(x)dx$ den Flächeninhalt unter dem Graphen von f berechnet.

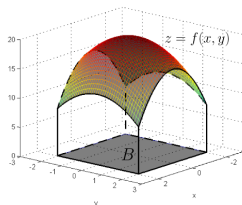
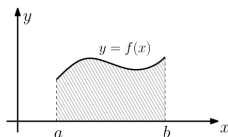


Wir suchen nach einer Verallgemeinerung, mit der man z. B. Volumina unter dem Graphen einer Funktion von zwei Variablen berechnen kann.

Wir wollen hier auf Details nicht eingehen, sondern uns auf den Fall stetiger Funktionen über $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ beschränken, wo man mehrdimensionale Integrale mit Hilfe des Satzes von Fubini auf eindimensionale zurückführen kann.

Im Vergleich zum Eindimensionalen treten folgende neue Probleme auf:

- die Arbeit mit zwei (oder noch mehr) Variablen im Integranden;
- der Integrationsbereich B kann im $\mathbb{R}^n$ eine wesentliche größere Formenvielfalt annehmen (nicht nur das dargestellte Rechteck).



Der Aufbau des Integralbegriffs erfolgt analog zum Eindimensionalen, d.h. in folgenden Schritten:

- Definition des Integrals für Treppenfunktionen (stückweise konstant über Rechtecken / Quadern);
- Approximation des gewünschten Volumens von oben und unten mit Integralen von Treppenfunktionen (d.h. der Summe von Quadervolumina).

Integrale über quader/rechteck-förmige Bereiche

Satz 6.1

Seien $a_i < b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, und $B_2 := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ bzw. $B_3 := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$. Weiters seien $f_i : B_i \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $i = 2, 3$, so gilt

$$\begin{aligned}\int_{B_2} f_2(x, y) d(x, y) &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(x, y) dy \right) dx, \\ \int_{B_3} f_3(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f_3(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.\end{aligned}$$

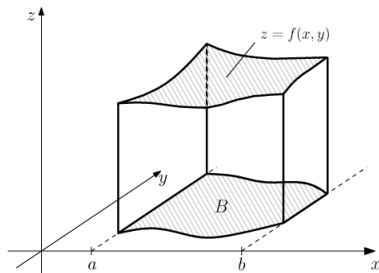
Die Integrationsreihenfolge darf beliebig vertauscht werden.

Integrieren Sie $f(x, y) = x^2 + 2xy$ über dem Rechteck B , definiert durch die Intervalle $0 \leq x \leq 1$ und $-1 \leq y \leq 1$. Bestimmen Sie den Wert des Integrals auch bei Vertauschung der Integrationsreihenfolge.

Integration über Normalbereiche

Bislang können wir nur Integrale über achsenparallele rechteckige bzw. quaderförmige Bereiche berechnen.

Dies reicht für viele praktische Aufgaben nicht aus – meist ist der Integrationsbereich B krummlinig oder zumindest anders begrenzt.



Die meisten praktischen Aufgaben lassen sich auf die Integration über sogenannte Normalbereiche zurückführen. Dies wollen wir zumindest für Flächen- und Volumenintegrale erörtern.

übliche Notationen

Für Flächenintegrale $f_2 : B_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ verwendet man neben $\int_{B_2} f_2(x, y) d(x, y)$ auch die Bezeichnungen

$$\int_{B_2} f_2(x, y) dx dy, \quad \int_{B_2} f_2(x, y) dA, \quad \iint_{B_2} f_2(x, y) dx dy \text{ und } \iint_{B_2} f_2(x, y) dA.$$

Für Volumenintegrale $f_3 : B_3 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ verwendet man neben $\int_{B_3} f_3(x, y, z) d(x, y, z)$ auch die Bezeichnungen

$$\int_{B_3} f_3(x, y, z) dx dy dz, \quad \int_{B_3} f_3(x, y, z) dV,$$

sowie

$$\iiint_{B_3} f_3(x, y, z) dx dy dz \text{ und } \iiint_{B_3} f_3(x, y, z) dV.$$

Definition 6.2 (Normalbereiche in der Ebene)

Sind $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit $g \leq h$ auf $[a, b]$, so nennen wir die Mengen

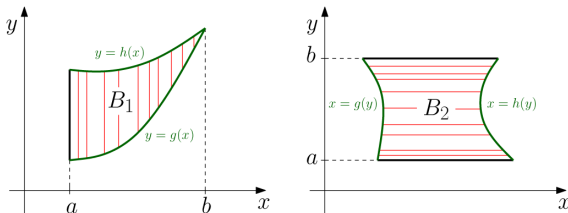
$$B_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\} \text{ bzw.}$$

$$B_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b \text{ und } g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

einen **Normalbereich** bezüglich der x -Achse bzw. bezüglich der y -Achse.

Beispiel: Kreise und Rechtecke sind Normalbereiche bezüglich beider Achsen.

Graphische Interpretation



$y = g(x)$ und $y = h(x)$ bzw. $x = g(y)$ und $x = h(y)$ lassen sich als Grund- und Deckelkurve von B interpretieren. Die vertikale bzw. horizontale Verbindung zwischen beiden liegt immer komplett in B .

Satz 6.3 (Integral über ebene Normalbereiche)

Seien $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $g \leq h$ auf $[a, b]$ und

$$B_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

$$B_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b \text{ und } g(y) \leq x \leq h(y)\},$$

die zugehörigen Normalbereiche im $\mathbb{R}^2$.

Ist $f : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\iint_{B_1} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Ist $f : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\iint_{B_2} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Integration über dreidimensionale Normalbereiche

Definition 6.4

Seien $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f_1 \leq f_2$ auf $[a, b]$. Wir definieren den **2D-Normalbereich**

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ und } f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}.$$

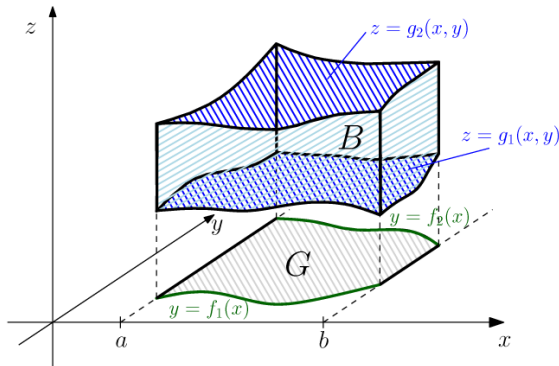
Seien außerdem $g_1, g_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $g_1 \leq g_2$ auf G . Dann nennen wir

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b \text{ und } f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \text{ und } g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

einen **3D-Normalbereich**.

Vertauscht man die Rollen von x , y und z , so entstehen fünf weitere Mengen, die auch Normalbereiche genannt werden.

Graphische Interpretation



- $z = g_1(x, y)$ und $z = g_2(x, y)$ stellen die Grund- und Deckelfläche von B dar – die vertikale Verbindung zwischen beiden muss immer komplett in B liegen.
- Der Normalbereich G ist die senkrechte Projektion von B in die $x - y$ -Ebene. Dessen Grund- und Deckelkurve sind durch $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ gegeben.

Satz 6.5 (Integral über 3D-Normalbereiche)

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein Normalbereich mit Darstellung gemäß Definition 6.4 und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx. \quad (7)$$

Vertauscht man in Definition 6.4 die Rollen von x, y und z , so ist dieser Variablentausch in (7) ebenfalls auszuführen.

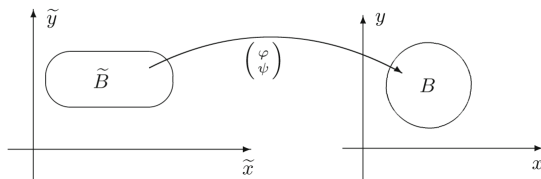
Berechnen Sie die folgenden Integrale

- $$\int_0^1 \left(\int_{g(x)=x^2}^{h(x)=\sqrt{x}} xy dy \right) dx,$$

- $$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (x+y) dy \right) dx.$$

Transformation der Variablen

Häufig sind kartesische Koordinaten für die Berechnung von Integralen eher ungeeignet – z.B. wenn man Symmetrie bezüglich gewisser Punkte oder Achsen nutzen will.



Die Funktionen (φ, ψ) stellen die eindeutige Abbildung den Bereich $\tilde{B}$ in der $(\tilde{x}, \tilde{y})$ -Ebene, auf den Bereich B in der (x, y) -Ebene, her. **Können wir diesen Gedanken, den Bereich $\tilde{B}$ durch eine Abbildung zu vereinfachen, für unsere Integrale auszunutzen?**

Satz 6.6

Durch die Funktionen

$$x = \phi(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad y = \psi(\tilde{x}, \tilde{y})$$

werde der Bereich $\tilde{B}$ der $(\tilde{x}, \tilde{y})$ -Ebene mit stückweise glatten Rand eineindeutig auf den Bereich B der (x, y) -Ebene abgebildet. Die Funktionen $x = \phi(\tilde{x}, \tilde{y})$ und $y = \psi(\tilde{x}, \tilde{y})$ und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung seien stetig in $\tilde{B}$. Im Innern von $\tilde{B}$ gelte für die **Funktionaldeterminante**

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\tilde{x}, \tilde{y})} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \phi(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial \psi(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \psi(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ist dann die Funktion $f(x, y)$ in B stetig, so gilt

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_{\tilde{B}} f(\phi(\tilde{x}, \tilde{y}), \psi(\tilde{x}, \tilde{y})) \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\tilde{x}, \tilde{y})} \right| d\tilde{x} d\tilde{y}.$$

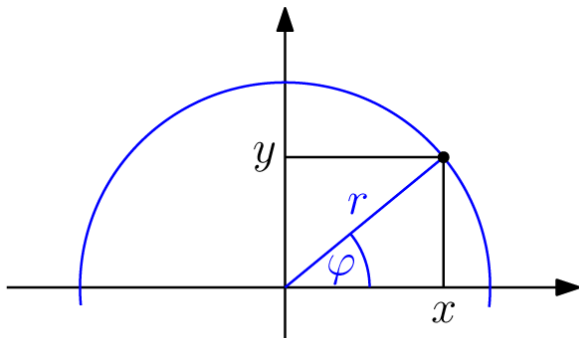
Ebene Polarkoordinaten

Im $\mathbb{R}^2$ ist die Transformation in Polarkoordinaten (ein Abstand, ein Winkel) mit Abstand die Wichtigste

$$\phi : [0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi : [0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Sie haben sie bereits im Kontext der Komplexen Zahlen kennengelernt.



Beispiel

Die Funktionaldeterminante für ebene Polarkoordinaten

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi)$$

lautet

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{vmatrix} = r(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = r.$$

Die Transformation auf Polarkoordinaten ist umkehrbar eindeutig in $\{\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)\}$, denn dort $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = r \neq 0$.

Bei der Substitution in Polarkoordinaten gilt also

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_{\tilde{B}} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \color{red}{r} dr d\varphi.$$

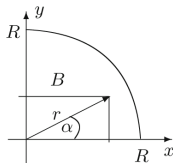
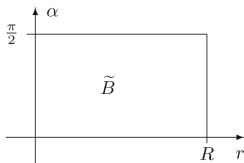
Berechnen Sie das Integral

$$\iint_B xy dB$$

über dem Viertelkreis

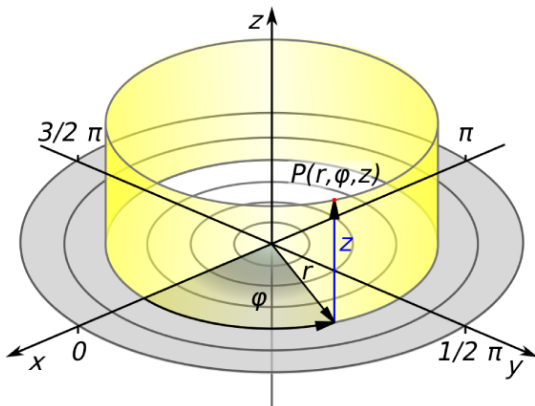
$$B := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, R \in \mathbb{R}\}$$

unter Verwendung von Polarkoordinaten.



Zylinderkoordinaten

Möchte man in Volumenintegralen Rotationssymmetrien bezüglich einer Koordinatenachse (hier: z -Achse) ausnutzen, verwendet man am häufig **Zylinderkoordinaten**.



In diesem Fall werden (x, y) in Polarkoordinaten transformiert und die z -Koordinate beibehalten.

Zylinderkoordinaten

Im $\mathbb{R}^3$ ist die Transformation in Zylinderkoordinaten (zwei Abstände, ein Winkel) lautet

$$\begin{aligned}\vec{\Phi} : [0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} x(r, \varphi, z) \\ y(r, \varphi, z) \\ z(r, \varphi, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Somit gilt

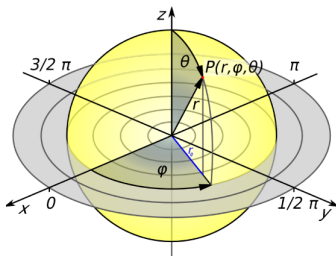
$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_z \\ y_r & y_\varphi & y_z \\ z_r & z_\varphi & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Bei der Substitution in Zylinderkoordinaten gilt also

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\tilde{B}} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) r dr d\varphi dz.$$

Kugelkoordinaten

Bei Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung bieten sich desweiteren **Kugelkoordinaten** an.



$r \dots$ Radius
 $\varphi \dots$ (östl.) geogr. Länge
 $\theta \dots$ Poldistanz

Anstelle der Poldistanz wird gelegentlich auch die geografische Breite verwendet. In den folgenden Formeln ist dabei jeweils $\sin(\theta)$ statt $\cos(\theta)$ zu schreiben und umgekehrt.

Kugelkoordinaten

Die Transformationabbildung lautet bei Kugelkoordinaten (ein Abstand, zwei Winkel)

$$\vec{\Phi} : [0, \infty) \times [0, \pi] \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x(r, \theta, \varphi) \\ y(r, \theta, \varphi) \\ z(r, \theta, \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Somit gilt

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) & r \cos(\varphi) \cos(\theta) & -r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) & r \sin(\varphi) \cos(\theta) & r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin(\theta).$$

Bei der Substitution in Kugelkoordinaten gilt also

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\tilde{B}} f(r \cos(\varphi) \sin(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) \mathbf{r^2 \sin(\theta)} dr d\varphi d\theta.$$

Bestätigen Sie die Beziehung $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin(\theta)$.

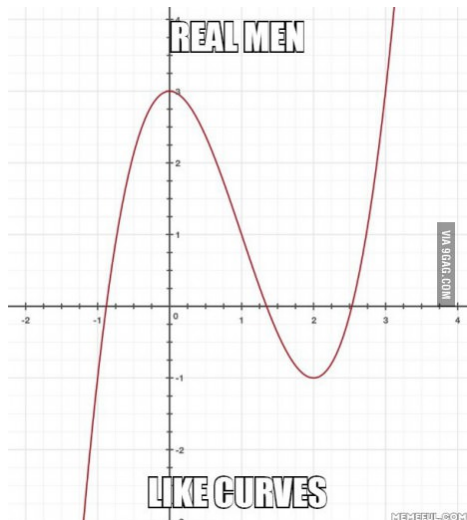
Berechnen Sie das Volumen einer Kugel $\iiint_B 1 dx dy dz$ mit dem Radius R als Volumenintegral über dem Bereich

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Berechnen Sie das Volumen des Körpers $\iiint_B 1 dx dy dz$ über dem Bereich

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 4\}.$$

Kurvenintegrale



Kurven

Hier stehen Funktionen vom Typ

$$\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

zur Diskussion, an die man üblicherweise noch näher zu spezifizierende Glattheitsvoraussetzungen stellt.

Solche Funktionen beschreiben

- für $n = 2$ Kurven in der Ebene,
- für $n = 3$ Kurven im Raum.

Zumeist interpretiert man das Argument t als Zeit, so dass $\vec{f}(t)$ den Ort zur Zeit t beim Durchlaufen der Kurve darstellt.

Beispiel

- Die Abbildung

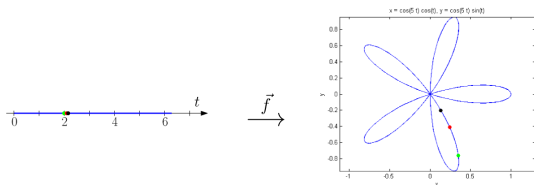
$$[0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

beschreibt den Einheitskreis in der Ebene.

Was ist der Unterschied zwischen Kurven und Funktionen?

Bei Kurven stellt man zumeist nur die Menge der Funktionswerte dar (rechtes Bild). Die Information über die zugehörigen Argumente (Zeiten) geht dabei verloren.

Bei Bedarf kann man aber zumindest einzelne Zeitpunkte wie im Bild rechts markieren (hier $t = 2, 2.1, 2.15$).



Gezeigt ist ein Bild der Blütenblattkurve

$$\vec{f}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} \cos(5t) \cos(t) \\ \cos(5t) \sin(t) \end{bmatrix}.$$

Kurvenintegrale

Wir wenden uns nun der Integration von Funktionen entlang bestimmter Kurven oder Wege zu. Motivierende Fragestellungen sind:

- Wie kann man die Länge einer krummlinigen Kurve berechnen?
- Welche mechanische Arbeit wird bei der Bewegung eines Massepunktes durch ein Kraftfeld entlang einer bestimmten Kurve verrichtet?

Definition 7.1

Eine stetig differenzierbare Abbildung $\vec{\gamma} : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Kurvenstück**.

Unter einer Kurve verstehen wir eine stetige, stückweise stetig differenzierbare Abbildung $\vec{\gamma} : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sie besteht aus endlich vielen Kurvenstücken

$$\vec{\gamma}_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, k, \quad t_a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t_e,$$

die miteinander verbunden sind – d.h. mit

$$\vec{\gamma}_{i+1}(t_i) = \vec{\gamma}_i(t_i), \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Das Argument $t \in [t_a, t_e]$ wird **Kurvenparameter** genannt.

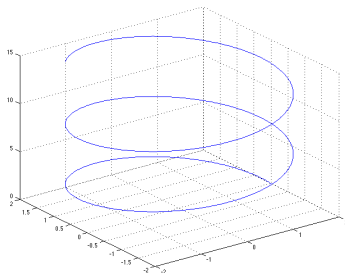
Bemerkung: Der Kurvenparameter wird meist als Zeit interpretiert und $\{\vec{\gamma}(t) : t \in [t_a, t_e]\}$ als Bahn eines Punktes beim "Durchlaufen" der Kurve.

Beispiel

Die Kurve

$$\vec{\gamma} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ 2 \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

beschreibt eine *Schraubenlinie*. Der Aufsicht auf diese Kurve von oben entspricht die Bewegung in der $x - y$ -Ebene, wo sie sich als kreisförmige Bahn mit Radius 2 erweist. Die Bewegung wird dabei jedoch im Lauf Zeit gleichzeitig mit konstanter Geschwindigkeit in z -Richtung "nach oben gezogen".

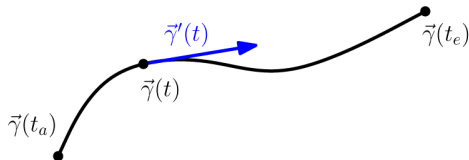


Interpretation der Ableitung

Die Ableitung

$$\vec{\gamma}'(t) = [\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)]^T \quad (t \neq t_i, i = 1, \dots, k-1)$$

wird in diesem Kontext als Geschwindigkeit im Punkt $\vec{\gamma}(t)$ interpretiert. Es verläuft tangential zur Bahnkurve.



Beispiel

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t der obigen Kurve berechnet sich zu

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

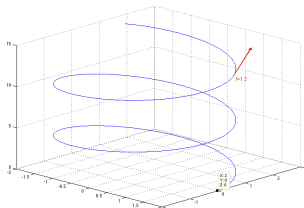
Zum Zeitpunkt $t = 13$ lautet der entsprechende Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{\gamma}'(13) = \begin{pmatrix} -2 \sin(13) \\ 2 \cos(13) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8403 \\ 1.8149 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t berechnet sich

$$|\vec{\gamma}'(t)| = \sqrt{4 \sin^2(t) + 4 \cos^2(t) + 1} = \sqrt{4(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + 1} = \sqrt{5}.$$

Er ist somit (in diesem Fall) während des gesamten Durchlaufs konstant!



Bogenelemente

Sei dt eine Beliebige reelle Zahl, $\vec{\gamma} : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $t \in [t_a, t_e]$.
Dann heißt

$$d\vec{x} := \vec{\gamma}'(t)dt$$

vektorielles Bogenelement.

Es beschreibt die Änderung des Ortes entlang der Tangente ausgehend vom Punkt $\vec{\gamma}(t)$, wenn man sich mit Geschwindigkeit $\vec{\gamma}'(t)$ eine Zeit dt lang auf dieser fortbewegt.

Für sehr *kleine Zeiten* dt stimmt die Änderung des Ortes $d\vec{x}$ entlang der Tangente nahezu mit der Ortsänderung entlang der Kurve $\vec{\gamma}$ überein.

Die Länge des vektoriellen Bogenelements ist

$$ds := \|\vec{\gamma}'(t)\|dt$$

und wird als **skalares Wegelement** oder **Längenelement** bezeichnet.

Kurvenintegral erster Art (skalares Kurvenintegral)

Für sehr kleine Zeiten dt entspricht das Längenelement $ds = \|\vec{\gamma}'(t)\|dt$ der in dieser Zeit auf der Kurve $\vec{\gamma}$ zurückgelegten Weglänge.

Es ist naheliegend, die Länge der Kurve durch Integration über die Längenelemente zu berechnen.

Zudem kann man die Bogenelemente beim Integrieren unterschiedlich gewichten. Dabei entsteht eine Konstruktion, die lokal vom Typ "Bogenlänge mal Zahl" ist.

Definition 7.2

Sei $\vec{\gamma} : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$\int_{\vec{\gamma}} f ds := \int_{t_a}^{t_e} f(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt$$

das *skalare Kurvenintegral* oder *Kurvenintegral erster Art* von f .

Speziell mit $f = 1$ ergibt sich die **Länge** der Kurve $\vec{\gamma}$ über

$$L = \int_{t_a}^{t_e} \|\vec{\gamma}'(t)\| dt = \int_{t_a}^{t_e} \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2} dt.$$

Man kann zeigen, dass die so definierte Länge unabhängig von der Wahl der Parametrisierung einer Kurve ist.

Beispiel

Die Länge der Schraubenlinie in obigem Beispiel für $t \in [0, 6\pi]$ ergibt sich gemäß

$$L = \int_0^{6\pi} \sqrt{4 \sin^2(t) + 4 \cos^2(t) + 1} dt = \int_0^{6\pi} \sqrt{5} dt = 6\sqrt{5}\pi.$$

Eine besonders einfache Formel ergibt sich für ebene Kurven $y = f(x)$ mit $a \leq x \leq b$ und stetig differenzierbare Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Diese lassen sich in der Form

$$\vec{\gamma}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad a \leq x \leq b$$

parametrisieren, so dass

$$\vec{\gamma}'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}.$$

Für die Bogenlänge gilt somit

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Berechnen Sie die Länge des Viertelkreisbogens im 1. Quartal

Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x, y) = 1 + \frac{y}{3}$ entlang der Kurve

$$\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} 30 \cos^3 t \\ 30 \sin^3 t \end{pmatrix}.$$

Kurvenintegral zweiter Art (Arbeitsintegral)

Definition 7.3 (Skalarfeld und Vektorfeld)

Eine Funktion

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *skalare Funktion* oder *Skalarfeld*,

$\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *vektorwertige Funktion* oder *Vektorfeld*.

Kurvenintegral zweiter Art (Arbeitsintegral)

Definition 7.3 (Skalarfeld und Vektorfeld)

Eine Funktion

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *skalare Funktion* oder *Skalarfeld*,

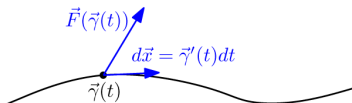
$\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *vektorielle Funktion* oder *Vektorfeld*.

Eine weitere Möglichkeit, Kurvenintegrale zu definieren, ergibt sich mit der Verwendung eines Vektorfelds $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ als Integrand.

Lokal multipliziert man $\vec{F}$ dabei skalar mit dem *vektoriellen* Bogenelement $d\vec{x}$ und erhält eine Zahl

$$dW = \vec{F}(\vec{\gamma}(t))^T d\vec{x} = \vec{F}(\vec{\gamma}(t))^T \vec{\gamma}'(t) dt.$$

Als typische Anwendung integriert man ein Kraftfeld $\vec{F}$ entlang eines Weges und erhält mit dW bzw. dem entsprechenden Integral $\int_{\vec{\gamma}} \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x}$ die mechanische Arbeit.



Definition 7.4

Sei $\vec{\gamma} : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x} := \int_{t_a}^{t_e} \vec{F}(\vec{\gamma}(t))^T \vec{\gamma}'(t) dt$$

das *Kurvenintegral zweiter Art* oder *Arbeitsintegral* von $\vec{F}$ entlang der Kurve $\vec{\gamma}$.

Das Vektorfeld

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) := -mg\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

beschreibt die auf einen Körper mit Masse m nahe der Erdoberfläche wirkende Schwerkraft.

Man Berechne $W = -\int_{\vec{\gamma}} \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x}$ längs der Kurve

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ (t-1)^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\vec{\gamma}} (xy, y - x) d\vec{x},$$

wobei $\vec{\gamma}$ das Stück der Parabel $y = x^2$ mit Anfangspunkt $(0,0)$ und Endpunkt $(1,1)$ ist.

Gegeben sei die Kraft

$$\vec{F}(\vec{x}) = (y + z, x + z, x + y).$$

Berechnen Sie die Arbeit, wenn die Teilchen vom Nullpunkt $(0,0,0)$ zum Punkt $(1,1,1)$ bewegt wird.

Potentialfelder und Potentiale

Wir berechnet man die mechanische Arbeit (z. B. in obigem Beispiel)?

Potentialfelder und Potentiale

Wir berechnet man die mechanische Arbeit (z. B. in obigem Beispiel)? $\Rightarrow$ als Differenz der potentiellen Energie:

$$W = |\Delta E_{pot}| = mg|\Delta z| = 1mg.$$

Um das auch mathematisch zu verstehen, müssen wir den Begriff der Stammfunktion auf Vektorfelder verallgemeinern.

Kurze Erinnerung:

Zu einer stetigen Funktion f hatten wir Stammfunktionen über die Beziehung $F' = f$ definiert. Verschiedene Stammfunktionen f unterscheiden sich nur um eine Konstante.

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

für jede Stammfunktion F von f .

Definition 7.5

Sei $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Ein Skalarfeld $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, welches

$$\operatorname{grad} V = \nabla V = \vec{F}$$

erfüllt, heißt *Potential* oder *Stammfunktion* von $\vec{F}$.

Gibt es zu einem Vektorfeld $\vec{F}$ ein Potential, so nennt man $\vec{F}$ ein *Potentialfeld*, *Gradientenfeld* oder auch *konservatives Feld*.

Zwei Potentiale zum gleichen Vektorfeld unterscheiden sich wieder nur um eine Konstante, solange man als Definitionsbereich zumindest eine "zusammenhängende" offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ wählt.

Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals

Satz 7.6

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Potentialfeld mit Potential V . Dann gilt für jede komplett in U verlaufende Kurve $\vec{\gamma} : [t_a, t_e] \rightarrow U$:

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x} = V(\vec{\gamma}(t_e)) - V(\vec{\gamma}(t_a)).$$

Das Kurvenintegral ist also in diesem Falle unabhängig vom gewählten Integrationsweg – es hängt lediglich vom Potential am Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.

Und wesentlich mehr...

Satz 7.7

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind äquivalent:

- $\vec{F}$ ist ein Potentialfeld.
- Das Integral

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x}$$

ist unabhängig vom gewählten Integrationsweg $\vec{\gamma} : [t_a, t_e] \rightarrow U$. Es hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve $\vec{\gamma}$ ab.

- Für alle geschlossenen Kurve $\vec{\gamma} : [t_a, t_e] \rightarrow U$, d.h. $\vec{\gamma}(t_a) = \vec{\gamma}(t_e)$, gilt

$$\oint_{\vec{\gamma}} \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x} = 0.$$

Integrabilitätsbedingung

Wie erkennt man aber, dass $\vec{F}$ ein Potentialfeld ist? Wir analysieren dies am Fall $n = 2$.

Setzt man $\vec{F}(x, y)$ als stetig differenzierbar voraus, so gilt in Falle der Existenz eines Potentials $V(x, y)$:

$$\vec{F}(x, y) = \nabla V(x, y) = \begin{pmatrix} V_x(x, y) \\ V_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz von Schwarz ist die Hesse-Matrix von V ,

$$\begin{pmatrix} V_{xx}(x, y) & V_{xy}(x, y) \\ V_{yx}(x, y) & V_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla F_1(x, y)^T \\ \nabla F_2(x, y)^T \end{bmatrix} = \vec{F}'(\vec{x})$$

symmetrisch und stimmt augenscheinlich mit der Jacobimatrix von $\vec{F}$ überein.

Satz 7.8

Ein stetig Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die Jacobimatrix $\vec{F}'(\vec{x})$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ symmetrisch ist.

Für $n = 2$, $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$, ergibt sich als Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

und für $n = 3$, $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Prüfen Sie anhand der Integrabilitätsbedingung, ob folgende Felder Potentialfelder sind:

- $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = [xy, x]^T$,
- $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = [y, x]^T$,

Noch etwas zu lesen...

- ① Kurvenintegral 1. Art (S. Bernstein):
<http://prezi.com/5f5kike6au14/kurvenintegral-1-art/>
- ② Kurvenintegral 2. Art (S. Bernstein):
<http://prezi.com/z1paci4sgjju/kurvenintegral-2-art/>

Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen / Tutorien)

- Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ anhand der Dimension n typisieren können und zu den verschiedenen Funktionstypen eine gute Vorstellung besitzen;
- die verschiedenen Ableitungsbegriffe (partielle, totale Ableitungen, Gradient) theoretisch gut verstanden haben und sicher berechnen können;
- Gradient und Höhenlinien geometrisch interpretieren können;
- lokale Extrema und Sattelpunkte sicher bestimmen können;
- den Begriff des Riemann-Integrals im $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, verstanden haben;
- über 2D- und 3D-Normalbereiche sicher integrieren können;
- Substitutionen zumindest in Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten sicher ausführen können;
- mit Kurven und deren Ableitungen sicher umgehen können.